UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LÍNEAL, CONCEPTOS ASOCIADOS Y APLICACIONES

TESIS
Para obtener el grado de

MAESTRO EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
WALTER MAGAÑA LANDERO

DIRECTORA
DRA. VERÓNICA VARGAS ALEJO

ASESORES
DR. CÉSAR CRISTÓBAL ESCALANTE
DRA. GUADALUPE DE LA PAZ CARMONA DOMÍNGUEZ
DRA. DARLY ALINA KÚ EUÁN
DR. VÍCTOR HUGO DE JESÚS SOBERANIS

Chetumal Quintana Roo, México, Octubre de 2014

UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

TRABAJO DE TESIS ELABORADO BAJO SUPERVISIÓN DEL COMITÉ DE ASESORÍA APROBADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

COMITÉ DE TESIS

DIRECTORA: ______________________
DRA. VERÓNICA VARGAS ALEJO

SUPERVISOR: ______________________
DR. CÉSAR CRISTÓBAL ESCALANTE

SUPERVISORA: ______________________
DRA. GUADALUPE DE LA PAZ CARMONA DOMÍNGUEZ

SUPERVISORA: ______________________
DRA. DARLY ALINA KÚ EUÁN

SUPERVISOR: ______________________
DR. VÍCTOR HUGO SOBERANIS CRUZ

UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍA

Chetumal, Quintana Roo, México, Octubre de 2014

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

AGRADECIMIENTOS

Al comité de revisión de mi tesis por todas las observaciones y valiosos comentarios.

A la Dra. Verónica Vargas Alejo por su disposición y apoyo sin los cuales estoy seguro este trabajo no habría sido posible.

A todos los profesores del programa de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas por compartir con un servidor todos sus conocimientos.

A la Universidad de Quintana Roo por todas las facilidades brindadas para la realización de mis estudios de maestría.

A mis compañeros de Maestría por su amistad.

A Lucía por su apoyo y comprensión.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo económico para la realización de mis estudios de maestría.

RESUMEN

En la presente tesis se documenta el proceso del diseño, implementación y evaluación de una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la función lineal sus conceptos asociados y aplicaciones.

Esta propuesta didáctica se sustenta en el análisis didáctico de la función lineal. Se da importancia al manejo de los diferentes registros de representación (tratamiento y conversión) ya que un concepto matemático es profundizado por el estudiante a medida que maneja sus diferentes registros.

En el primer capítulo se plantean los antecedentes, la descripción del problema abordado, la justificación, los objetivos del trabajo de tesis así como los alcances y limitaciones de la propuesta didáctica.

En segundo capítulo se presentan la revisión de literatura en la cual se sustenta el trabajo de tesis. Se presenta una discusión sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva pragmática-sociohistórica, la perspectiva de Modelos y Modelación y la Resolución de problemas. Se revisa la teoría de Duval por su aportación para la comprensión del aprendizaje de la función lineal.

En el tercer capítulo se describe el objetivo y las características de la propuesta didáctica, el contexto institucional donde se implementó, las fases del diseño y los criterios que se siguieron para implementarla y evaluarla.

En el cuarto capítulo se presentan los resultados y el análisis de los mismos derivado de la implementación de la secuencia didáctica en el aula. Se documenta el proceso de desarrollo de conocimiento de los estudiantes en cuanto al concepto de función lineal, mediante la descripción y el análisis de los procedimientos llevados a cabo por ellos al resolver cada una de las actividades. Se presentan dificultades y logros de aprendizaje así como el papel del profesor para apoyar el desarrollo de conocimiento. Se inicia con una breve discusión respecto a los resultados obtenidos a partir de la prueba piloto y posteriormente se presenta la discusión de los resultados obtenidos a partir de la implementación de la

secuencia didáctica, la cual fue modificada con base en los resultados de la prueba piloto.

Por último se plantean las conclusiones de acuerdo con los objetivos planteados y los alcances de los estudiantes y se describen las recomendaciones para los docentes que deseen trabajar la propuesta con sus estudiantes.

Con la descripción y el análisis de los resultados derivados de la implementación de la propuesta se muestra cómo se apoyó el desarrollo de la comprensión de los estudiantes del concepto de función lineal, de manera simultánea al manejo (tratamiento y conversión) de diferentes registros de representación: algebraico, gráfico, tabular y verbal.

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA

En este primer capítulo se plantean los antecedentes, la descripción del problema abordado, la justificación, los objetivos del trabajo de tesis así como los alcances y limitaciones de la propuesta didáctica.

1.1. ANTECEDENTES

Una de las características más importantes de las matemáticas en la actualidad, es su uso en casi todas las áreas del quehacer humano, desde las actividades cotidianas hasta la investigación científica.

> En las últimas décadas, las investigaciones de psicólogos y educadores sobre el aprendizaje de las disciplinas complejas como las matemáticas han establecido sólidamente el importante papel de la comprensión conceptual en el conocimiento y la actividad de las personas competentes. (NCTM, 2003, p. 21)

La matemática educativa estudia los procesos de enseñanza-aprendizaje de los diferentes contenidos matemáticos en situaciones escolares. A partir de estudios realizados desde esta disciplina (por ejemplo, los divulgados en memorias de congresos como el PME, ICTMA, COMIE, etc. y en revistas especializadas), se han identificado problemas en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática y se ha contribuido además, con propuestas[1] para mejorar este proceso.

Por otra parte, el concepto de función lineal es fundamental en la educación matemática escolar de un individuo debido a su relación con otros conceptos matemáticos como pendiente y variación; además, por ser la base para la comprensión de conocimientos más complejos como proporción, tasa de cambio, que implican la comprensión previa de este concepto y que son fundamentales en el Cálculo (Stroup, 2007).

Asimismo, el concepto de función es de gran utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería,

[1] Las palabras propuesta y secuencia se utilizarán como sinónimos en la tesis.

de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables. Por ejemplo, en economía (uso de la oferta y la demanda) los ecónomos se basan en la linealidad de esta función, y las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. Otro ejemplo, si una persona desea producir cierto artículo entonces sus costos totales por la producción de x artículos se puede estimar mediante la función lineal $C = ax + b$ en la cual a representa el costo unitario de producción y b los costos fijos (inversión inicial por materia prima, mano de obra, etc).

Las modelos lineales permiten resolver problemas de las ciencias que se comportan linealmente y aproximar otros cuya modelación es no lineal (Reid, Gareis, Hernández y Roldan, 2012).

El primer acercamiento que tienen los estudiantes con el concepto de función lineal es en la educación secundaria; en particular, se trabajan las funciones en sus representaciones algebraicas, tabulares y gráficas, $f(x) = ax$ y $f(x) = ax + b$.

Por experiencia propia se sabe que los estudiantes de todos los niveles tienen dificultades con el manejo del concepto de función lineal (y en general de función) ya que la manera tradicional de abordar este concepto en las clases es mediante la exposición del docente, quien con base en la manipulación de una expresión simbólica[2] que representa una determinada línea recta, elabora una tabla de valores para luego trazar la gráfica. Los coeficientes a y b de la expresión $f(x) = ax + b$ se tratan como valores numéricos que determinan la expresión simbólica de rectas particulares (Bravo, Tavera y Tibocha, 1999).

Los diseños de aprendizaje que hacen énfasis en la exposición por parte del docente de los conceptos, como el de función lineal, acompañado de ejercicios tradicionales, no logran una comprensión adecuada del concepto (Quiroga, Vázquez y Hinojosa, 2004). Los estudiantes responden muchas veces, de manera

[2] Se usará indistintamente las palabras *representación simbólica* y *representación algebraica*, o bien *expresión simbólica* y *expresión algebraica* en esta tesis, para referirnos al registro simbólico descrito por la teoría de Duval (2006a, 2006b).

correcta, los ejercicios propuestos sin comprender lo que están haciendo. Sólo dan una respuesta para que su maestro quede conforme (Guzmán y Consigliere, 1992).

Para que un estudiante logre comprender el concepto de función lineal se requiere de la coordinación de todos los registros de representación (Verbal, gráfico, algebraico y tabular) que este concepto involucra.

> La comprensión de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de los diversos registros de representación y darse cuenta que la forma específica de representar para cada sistema semiótico es condición cognitiva para la comprensión. (Duval, 2006b, p. 166)

El concepto de función lineal (y en general el de función) relaciona una gran variedad de representaciones (como son la representación gráfica, la expresión algebraica, la tabular y verbal). Éstas son mencionadas en varios de los materiales de apoyo para el profesor y en algunos textos utilizados por el estudiante al abordar el tema. La comprensión de este concepto involucra la articulación coherente de estos registros de representación que juegan un papel primordial en la resolución de un problema, como lo menciona Duval (1998) cuando argumenta sobre la importancia de los registros de representación semiótica. La conversión o transformación de una representación a otra perteneciente a otro registro juega un papel fundamental en la actividad matemática.

Al respecto D´Amore (2004) menciona que:

> La construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos, de representarlos en un registro dado, de tratar tales representaciones al interior de un mismo registro, de convertir tales representaciones de un registro dado a otro. (p.14)

1.2. PROBLEMA

Dada la importancia del aprendizaje de la función lineal en el currículo matemático mexicano e internacional, por su importancia en el desarrollo de un pensamiento matemático, existe una necesidad por diseñar propuestas didácticas que permitan desarrollar conocimientos en torno al concepto de función lineal, habilidades y actitudes matemáticas en estudiantes del nivel superior (Reid *et al*, 2012; Sepúlveda, 2006).

En el presente trabajo se muestra la elaboración, aplicación y evaluación de una secuencia didáctica que tiene como objetivo fundamental contribuir a mejorar la enseñanza-aprendizaje de la función lineal, sus conceptos asociados y las aplicaciones de la misma.

1.3. Justificación

El programa de matemáticas vigente para la educación secundaria plantea en su propósito central: que el alumno fortalezca sus conocimientos y habilidades (operatorias, de comunicación y descubrimiento) adquiridos en educación primaria, y aprenda a utilizarlas en la “solución de problemas”, no solamente en los que se resuelven con los procedimientos y técnicas aprendidas en la escuela, sino también aquellos cuyo descubrimiento y solución requieren de la curiosidad y la imaginación creativa. (SEP, 2011, p. 22)

Dentro de los estándares de matemáticas (NCTM, 2003), en el eje temático sobre sentido numérico y pensamiento algebraico, cuando se hace mención al tema de Patrones y Funciones se menciona, entre otros aspectos:

a) Identificar los efectos de los parámetros m y b de la función $y = mx + b$, en el gráfico correspondiente.

b) Mostrar la relación de dependencia entre dos conjuntos de cantidades a través de una función lineal.

c) Identificar, interpretar y representar funciones lineales y no lineales de forma gráfica y algebraica de una serie de situaciones y otras áreas del programa de estudio. (NCTM, 2003, pág. 301)

En México, se aplican tres pruebas, ENLACE, PISA y Excale que aportan información acerca del logro escolar de los estudiantes que finalizan la educación secundaria. A pesar que de que en la educación secundaria se aborda el tema de función lineal, los resultados de esas pruebas anteriormente mencionadas revelan que el 79 % de los alumnos no resuelven los problemas que implican usar la jerarquía de operaciones, no modelan situaciones mediante una función lineal o cuadrática ni situaciones que implican sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. (SEP, 2012, p.12)

Cuando los estudiantes ingresan a la educación superior arrastran deficiencias en la compresión y manejo de la función lineal. Tal es el caso de los estudiantes de las carreras de ingeniería de la Universidad de Quintana Roo, los cuales presentan dificultades como las siguientes:

a) No identifican cuándo existe una dependencia funcional en una situación dada.
b) No identifican las variables involucradas en una dependencia funcional, es decir, variable dependiente e independiente.
c) En el contexto de una situación que se representa por medio de una función lineal, no logran determinar el dominio de dicha función
d) No interpretan, ni manejan los conceptos asociados a la función lineal, pendiente, ceros, etc.
e) No interpretan la información contenida en la representación gráfica de una función lineal.
f) No hacen la transición de una forma de representación a otra.

Santos (1997, 2002) afirma que aprender matemáticas significa identificar los artefactos de la disciplina, esto es, sus conceptos y procedimientos. Otra idea de aprender matemáticas se relaciona con que el estudiante desarrolle o construya ideas matemáticas; y un aspecto esencial en el desarrollo de estas ideas es el proceso de formular y resolver problemas ya que desempeña un papel muy importante cuando se discuten las estrategias y el significado de las soluciones.

Para la perspectiva de modelos y modelación el proceso de solución que se realiza se vuelve más importante que el resultado (Lesh y Doerr, 2003). Ya que las matemáticas son una actividad cuyo fin último es resolver problemas se debe tomar en cuenta que los problemas interesantes son aquellos en los cuales el estudiante tiene la oportunidad de experimentar, conjeturar, y descubrir (Lesh y Doerr, 2003).

En este sentido es importante diseñar, elaborar y experimentar propuestas didácticas que lleven a los estudiantes a desarrollar conocimientos, habilidades y actitudes para:

a) Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas.
b) Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema.
c) Elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas.
d) Escoger y adaptar la estrategia adecuada para la resolución de un problema.
e) Comunicar sus estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.
f) Predecir y generalizar sus resultados.

Además se considera que estas propuestas educativas deben propiciar que los estudiantes aprendan no solo de forma individual, sino colectiva, en comunidades y ambientes de enseñanza-aprendizaje donde estos sean considerados como parte de la comunidad donde hay objetivos definidos (Greeno, Collins y Resnick, 1996). La comunicación es un aspecto relevante que permite a los individuos explicar y describir sus propias ideas, validarlas, negociarlas, redefinirlas o bien cambiarlas, lo cual es esencial en el desarrollo del conocimiento.

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. Objetivo de la tesis

El objetivo de la tesis presente es documentar el diseño, la implementación y evaluación de una secuencia didáctica que permita a los estudiantes comprender y utilizar la función lineal en la descripción, interpretación y solución de problemas cercanos a su vida real.

1.4.2. Objetivo general de la secuencia

Que el estudiante desarrolle conocimientos, habilidades y actitudes relacionadas con el concepto de función lineal y conceptos asociados (pendiente, intersección, tasa de cambio) mediante la implementación de la secuencia didáctica diseñada, en un ambiente de resolución de problemas, donde los estudiantes usen representaciones diversas (verbal, algebraica, gráfica, tabular) argumenten, expliquen y describan situaciones en ambientes de trabajo colaborativo.

1.4.3. Objetivos particulares de la secuencia

Al finalizar las actividades de la secuencia didáctica se espera que el estudiante:

a) Interprete de manera geométrica los parámetros asociados a la representación simbólica de una función lineal.

b) Determine la representación simbólica de una función lineal a partir de la representación gráfica o tabular.

c) Dada una situación, que se representa por medio de una función lineal, pueda identificar e interpretar los conceptos asociados tales como, variación, proporción, tasa de cambio, ceros.

d) Identifique cuándo se puede ajustar un modelo lineal en una situación real.

Se espera que al finalizar las actividades de la secuencia el estudiante pueda resolver problemas como el siguiente.

Un cultivo de soya produce 2.6 ton/ha aplicando una fertilización con fosfato diamónico (DAP) de 45 kg/ha, y produce 3.3 ton/ha si se fertiliza con 55 kg DAP/ha.

a) Con estos datos ¿Es posible determinar un modelo que permita predecir la producción para otra cantidad de fertilización? ¿Cuál sería el modelo? ¿Cómo cambia la producción a medida que cambia la fertilización? ¿Cuál sería la producción si la fertilización fuera de 48 kg DAP/ha? ¿Con que nivel de fertilización la producción sería cero?

b) Otra variedad de soya se comporta diferente frente al mismo fertilizante: produce 1.9 ton/ha si se aplican 40 kg DAP/ha, y 3.8 ton/ha si se agregan 60 kg DAP/ha. Determine el modelo para la producción de esta variedad. ¿Cómo cambia la producción a medida que cambia la fertilización? ¿Cuál sería la producción si la fertilización fuera de 48 kg DAP/ha? ¿Con que nivel de fertilización la producción sería cero?

c) Compare el comportamiento de ambas variedades y saque conclusiones.

d) ¿Existe alguna cantidad de fertilización para la cual las producciones sean las mismas?

1.5. ALCANCES Y LIMITACIONES

La selección de las actividades de la propuesta didáctica presentada en este trabajo de tesis se realizó pensando en diseñar problemas que posean significado para los estudiantes, es decir, en problemas cercanos a un contexto de la vida real que promuevan la comprensión de los conceptos que están estudiando. Actividades en las cuales estén implícitos los conceptos asociados a la función lineal (pendiente, intersección, tasa de cambio) que propician que los estudiantes la conciban como una herramienta de gran utilidad.

Las actividades están diseñadas para que el estudiante sea capaz de aprender con entendimiento dando significado a los conceptos asociados a la función lineal, así como a los parámetros involucrados en la representación simbólica (pendiente e intersección) de la función lineal.

Se pretende que el estudiante pueda manejar de manera eficiente los registros de representación de la función lineal (verbal, simbólico, tabular y gráfico). Que pueda hacer el tratamiento en un registro de representación y la conversión entre ellos al resolver problemas en el contexto de la vida real.

Por lo tanto, el alcance de la tesis es proporcionar una herramienta a los docentes que les permita propiciar en los estudiantes la comprensión del concepto de función lineal y conocimientos matemáticos asociados. La propuesta posibilita desarrollar formas de razonamiento en los estudiantes al resolver problemas relacionados con la función lineal; puede ser útil para analizar y reflexionar acerca del proceso de desarrollo de conocimiento de los estudiantes cuando se implementa como se menciona en el Capítulo 3.

Nuestro mundo se encuentra en constante cambio, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debe ajustarse a este cambio, por esto es importante desarrollar propuestas didácticas en las cuales el estudiante se sienta comprometido con su propio aprendizaje, que participe de manera activa en la comunidad de aprendizaje en la cual está inmerso y sea capaz de resolver problemas. Que pueda argumentar y validar sus razonamientos. Las actividades de esta secuencia van encaminadas a lograr estos aspectos.

Una limitante de la propuesta didáctica es que uno de los conceptos centrales de la matemática, el concepto de variable, se aborda sólo desde el ambiente de aprendizaje del lápiz y papel, lo cual no le brinda un carácter dinámico. Sin embargo, la propuesta puede llevarse a la práctica en cualquier escuela que no cuente con los medios tecnológicos para apoyar el aprendizaje de la matemática. Además, puede ser la base para el diseño de actividades en ambientes tecnológicos, ya que destaca cuáles conceptos son importantes para comprender el concepto de función lineal.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE LITERATURA

En este capítulo se presenta la revisión de literatura en la cual se sustenta el trabajo de tesis. Se muestran aportes sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva pragmática-sociohistórica, la perspectiva de Modelos y Modelación, la Resolución de problemas y la teoría de Duval por su importancia para desarrollar la comprensión del aprendizaje de la función lineal.

2.1. CONCEPTOS MATEMÁTICOS

En todas las leyes que rigen a los fenómenos de la naturaleza se puede apreciar que distintas magnitudes están íntimamente relacionadas unas con otras y que además algunas de ellas quedan completamente determinadas por los valores de las demás. Por ejemplo, el volumen de una cantidad conocida de gas a una temperatura dada viene determinado por su presión; el área de un círculo queda completamente determinada por el valor de la longitud de su radio; la presión ejercida sobre un área determinada depende de la fuerza ejercida (Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev, 1994) Relaciones de este tipo dieron origen al concepto de función.

2.1.1. El concepto de función a través de la historia

Se conoce como "Matemática Antigua o prehelénica" a aquella que se desarrollaba en las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India. En la época antigua no existía una idea abstracta de variable, y las cantidades se describían verbalmente o por medio de gráficos (Kline, 1972). Sin embargo, en este período, comenzaron a desarrollarse algunas manifestaciones que implícitamente contenían la noción de función.

De acuerdo con Kline (1972) podemos decir que los primeros indicios que se tienen del concepto de función datan de la antigua Babilonia en el año 2500 a.C. Los Babilonios construyeron tablas para cuadrados, cubos y recíprocos de números naturales, las cuales eran usadas para resolver ecuaciones. Estas tablas sin duda definen funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ o de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, lo que no implica que los babilonios conocieran el concepto de función. Conocían y manejaban funciones específicas, pero no utilizaban la palabra función ni el concepto de función como lo conocemos hoy en día.

Durante la edad media se estudiaron fenómenos naturales como: calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. Las ideas se desarrollaron alrededor de cantidades variables independientes y dependientes, pero sin dar definiciones específicas. Así, la evolución de la noción de función se dio asociada al estudio del cambio, en particular del movimiento. Una función se definía por una descripción verbal de sus propiedades específicas o mediante un gráfico pero aún no se usaban las fórmulas o lenguaje algebraico, ni se definía el concepto como en su forma actual.

El estudio del cambio se inicia con la representación gráfico-geométrica, construida por Nicolás Oresme (1323 -1382), como método para representar las propiedades cambiantes de los objetos. Oresme desarrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas (Aleksandrov *et al*, 1994). En su obra *Tractatus de latitudinibus formarum*, las funciones aparecen dibujadas por primera vez, trasladando al plano lo que hasta entonces habían hecho los geógrafos sobre la esfera. Mantuvo incluso los nombres, y llamó longitud y latitud a los antepasados de lo que hoy llamamos abscisa y ordenada.

Entre los años de 1450 a 1650 se produjeron sucesos fundamentales para el desarrollo del concepto de función (Kline 1972): la extensión del concepto de número al de números reales, e incluso a números complejos (Bombelli, Stifel), la creación del Álgebra simbólica (Vieta, Descartes), el estudio del movimiento como un problema central de la ciencia (Kepler, Galileo), la unión entre el Álgebra y la Geometría (Fermat, Descartes).

Quien también contribuyó a la creación de la idea de función fue Galileo (1564 - 642). Él introdujo lo numérico en las representaciones gráficas y expresó las leyes del movimiento, a las que incorporó el lenguaje de la teoría de las proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional, lenguaje que junto con la teoría de la época encubrió aspectos de la variación continua. En su obra se encuentran numerosas expresiones de relaciones funcionales, con palabras, y en el lenguaje de las proporciones.

Descartes (1596-1650) fue quien desarrolló la idea de introducir una función en forma analítica (Kline, 1972). Él quería reducir la solución de todos los problemas algebraicos y de ecuaciones a un procedimiento estándar que le permitiera encontrar las raíces. Este matemático fue el primero en poner en claro que una ecuación en *x* y *y* es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables, de modo que los valores de una de ellas pudieran calcularse a partir de los correspondientes valores en la otra variable. Esta forma de definir a la función, en términos de variables, es importante y un gran paso en el desarrollo del concepto de función.

Leibniz (1646 - 1716) fue el primer matemático en utilizar la palabra *función* en 1692. Usó esta palabra para referirse a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada. Por ejemplo, Leibniz afirmaba que *"una tangente es una función de una curva"*. También introdujo las palabras: *constante*, *variable*, *coordenadas* y *parámetro*. Clasificó a las curvas en: "algebraicas", las representadas por una ecuación de cierto grado y "transcendentes", las representadas por una ecuación de grado infinito o indefinido. (Ugalde, 2014, p.12)

En 1665, Newton utilizó la palabra *fluent* para representar cualquier relación entre variables. Además introdujo la noción de *diferencial,* designada por la palabra *momento,* el cual es producido por una cantidad variable llamada *genita*, en una aproximación al concepto de *función*.

Jean Bernoulli (1667- 1748) utilizó como símbolo la letra griega s, para representar una función de una variable. En 1718, planteó una primera definición explícita del concepto de función.

Euler (1707 - 1783) continuó el proceso iniciado por Bernoulli para precisar la noción de *función* comenzando a definir nociones iniciales como son: *constante* y *cantidad variable* y, en 1755, definió *función* como una expresión analítica. (Ugalde, 2014, p.14)

El concepto de *función* evolucionó, enriqueciéndose y cambiando su significado a partir de la controversia iniciada entre D´Alembert (1717-1783) y Euler sobre el problema de la cuerda vibrante. La discusión entre D´Alembert, y Euler y D. Bernoulli (1700 -1782) se centró alrededor del significado de la palabra *función* y versó sobre las funciones que solucionaban este problema.

A partir de 1720, y hasta 1820, comenzó a desarrollarse en el seno del campo de la Matemática una nueva disciplina cuyo objeto de estudio fueron las funciones: el Análisis. Antes de esto las funciones fueron mayoritariamente definidas y aplicadas en el Cálculo. Entonces se discutía si las funciones debían ser representadas geométricamente (en la forma de una curva), analíticamente (en la forma de una fórmula), o lógicamente (en la forma de una definición). Fourier (1768 - 1830), estudiando el flujo de calor en cuerpos materiales, contribuyó a la evolución del concepto de *función* al considerar la temperatura como función de dos variables: tiempo y espacio. Conjeturó, pero no probó matemáticamente, que era posible desarrollar una función dada en un intervalo apropiado mediante una serie trigonométrica. (Ugalde, 2014, p.15)

En 1837 Dirichlet estableció las condiciones suficientes para que tal representación fuera posible y definió *función* de la siguiente forma: Una cantidad variable y se llama función de la cantidad variable x si a cada valor de x le corresponde un solo determinado valor de y. Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x. (Ugalde, 2014, p.16)

El grupo Bourbaki, en 1939, definió *función* como una correspondencia entre dos conjuntos de una forma semejante a la dada por Dirichlet en 1837, también la definió como conjunto de pares ordenados.

Durante alrededor de 3700 años se trabajó con objetos matemáticos que solo llevaban implícitos el concepto de *función*. Pero fueron necesarios 300 años para la formación y desarrollo del concepto como tal.

Conocer la historia del desarrollo del concepto de función ha sido importante para varios educadores matemáticos como Kline (1972) y Aleksandrov(1994), porque la historia permite analizar cómo surgió y se desarrolló este concepto. Por ejemplo, se puede observar que el concepto de función siempre estuvo latente en sus diferentes registros de representación: tabla, gráfica, simbólico y verbal. El uso de las representaciones junto con la resolución de problemas fue importante para el desarrollo del concepto, ahora clasificado dentro del campo del cálculo y análisis matemático.

En investigaciones concernientes al aprendizaje de funciones, se ha observado que las dificultades de los estudiantes se encuentran en las articulaciones de los registros simbólicos de la noción de función en las conversiones[3] de un registro a otro o en el trabajo dentro de un mismo registro (Duval, 2006b; Quiroga *et al*, 2004). También se discute la necesidad de revisar cuál concepto de función deberían aprender los estudiantes (Hitt, 1996) ¿Cómo debe concebirse el proceso de enseñanza-aprendizaje de este concepto? ¿Qué tipo de actividades se deben proponer? ¿Qué papel debe tomar el profesor?

2.1.2 Clasificación de las funciones

De acuerdo con la forma de la expresión algebraica de una función, ésta se puede clasificar de la manera siguiente (Figura 2.1).

---

[3] De acuerdo con Duval (2006a, 2006b) se entiende por conversión a la trasformación de una forma de representación en otro registro de representación, conservando la totalidad o solamente una parte del contenido inicial. Por ejemplo, realizamos una conversión cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función (o viceversa), o cuando transformamos una ecuación a un enunciado en lengua natural (o viceversa).

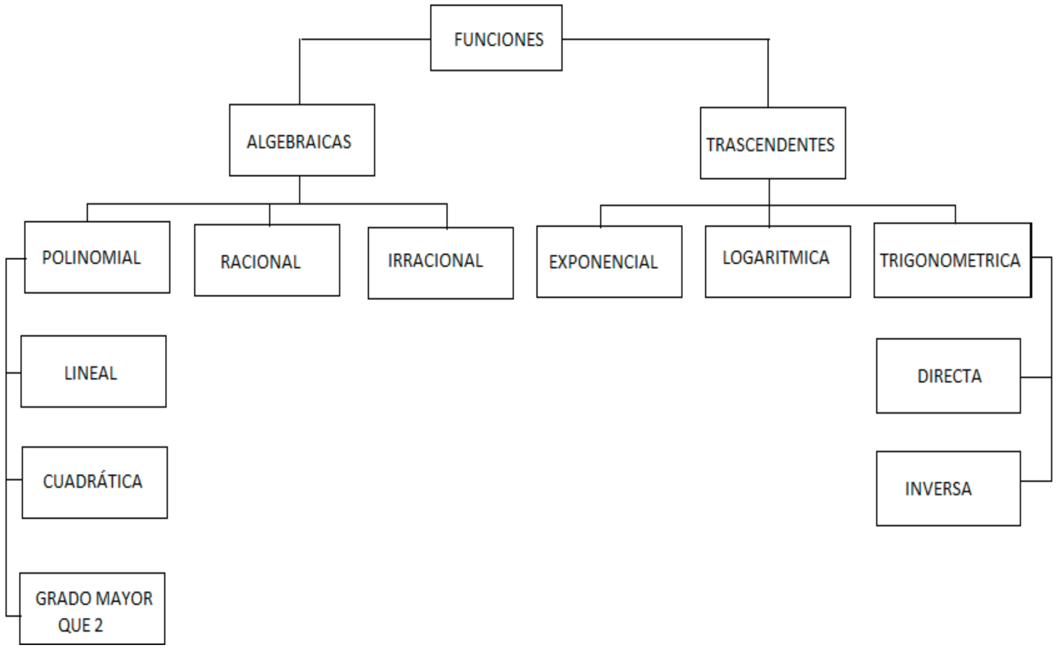


Figura 2.1 Clasificación de las funciones de acuerdo a su representación simbólica.

La función lineal es aquella cuya expresión algebraica está dada como $y=ax+b$, en donde a y b son constantes. Estas funciones tienen como gráfica (Figura 2.2) una línea recta que forma un ángulo θ con el eje X (en la cual $\theta = \tan^{-1}(a)$) y que corta al eje Y en el punto (0, b).

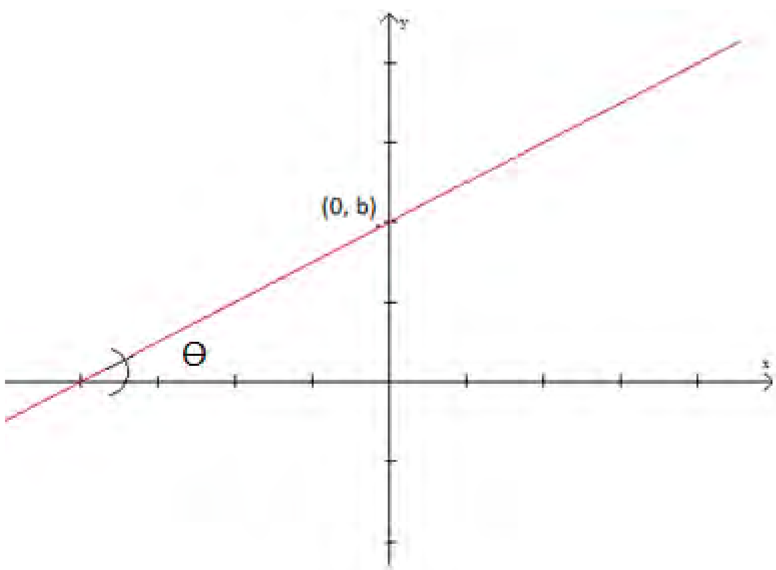


Figura 2.2. Gráfica de una función lineal.

Las funciones lineales aparecen con mucha frecuencia en las aplicaciones prácticas. Por ejemplo, la longitud l de un cuerpo puede considerarse con buena aproximación como una función lineal de su temperatura: $l = l_0 + al_0 t$. En donde a es el coeficiente de dilatación lineal y l_0 es la longitud inicial del cuerpo $(t = 0)$.

Las funciones lineales son muy útiles debido a su sencillez y porque es posible considerar ciertas variaciones no uniformes como aproximaciones lineales aunque sea en un intervalo pequeño.

Al estudiar la función lineal, es de suma importancia poner atención al significado de los parámetros a y b así como a los conceptos que subyacen a ella, tales como variación, proporción, tasa de cambio, ceros, ecuación (Reid *et al*, 2012; Quiroga *et al,* 2004; Sepúlveda, 2006).

El siguiente mapa conceptual (Figura 2.3) muestra los conceptos asociados a la función lineal.

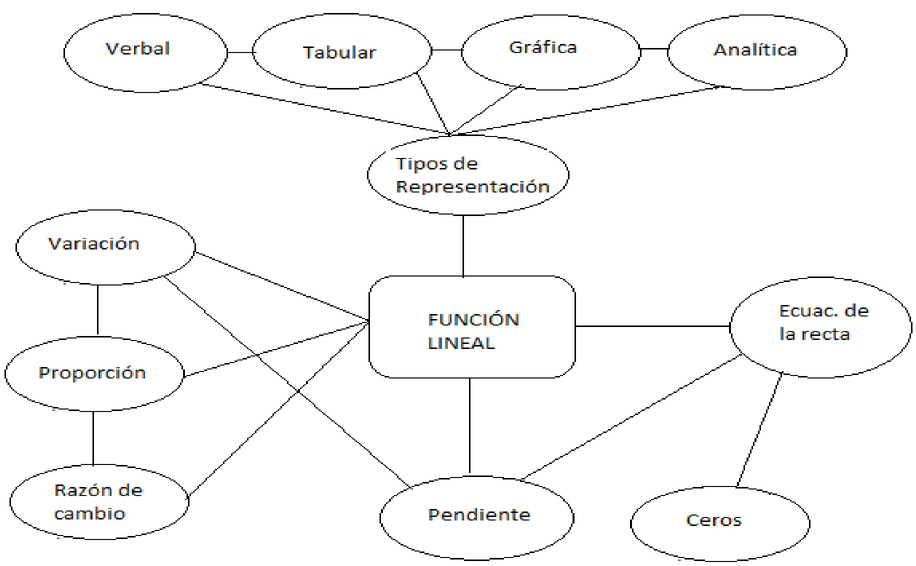


Figura 2.3. Mapa conceptual de la función lineal.

2.2 DIFICULTADES DE COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES

Como se mencionó en párrafos anteriores, existen investigaciones concernientes al aprendizaje de funciones, en las cuales se señala que las dificultades de los estudiantes se encuentran en las articulaciones de los registros simbólicos de la noción de función en las conversiones[4] de un registro a otro o en el tratamiento (Duval, 2006b; Quiroga *et al*, 2004). Estas y otras dificultades señaladas en cuanto al aprendizaje del concepto de función, y los conceptos relacionados, de acuerdo con el NCTM (2000), deben abordarse en el aula teniendo como base una concepción de enseñanza y aprendizaje diferente a la tradicional, en donde la memorización de procedimientos y conceptos no sea aquello en lo cual se enfatiza en el salón de clase.

> Los estudiantes que memorizan hechos y procedimientos sin comprenderlos, frecuentemente no están seguros de cuándo y cómo utilizar lo que saben, y tal aprendizaje es muchas veces bastante frágil. Aprender con comprensión hace más fácil el aprendizaje posterior. Las matemáticas cobran más sentido y se recuerdan y aplican más fácilmente cuando los estudiantes conectan de forma significativa los nuevos conocimientos a los ya existentes, de esta manera son más asequibles para su empleo en situaciones nuevas. (NCTM, 2003, p. 21)

El desarrollo de los conceptos mostrados en la Figura 2.3, por parte de los estudiantes, no es sencillo, el aprendizaje requiere tiempo y el contacto con experiencias que contemplen una observación activa. De acuerdo con Duval (1998, 2006a, 2006b) un concepto matemático toma significado para el estudiante cuando es capaz de manejar diferentes registros de representación de este objeto. La *conversión* y el *tratamiento* son importantes.

> Desde un punto de vista matemático la conversión y el tratamiento son un todo en la resolución de problemas. Es más, lo que importa es el tratamiento que es el que hace relevante la elección del "mejor" cambio de registro para

[4] De acuerdo con Duval (2006a, 2006b) se entiende por conversión a la trasformación de una forma de representación en otro registro de representación, conservando la totalidad o solamente una parte del contenido inicial. Por ejemplo, realizamos una conversión cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función (o viceversa), o cuando transformamos una ecuación a un enunciado en lengua natural (o viceversa).

> resolver el problema dado. La capacidad de cambiar de un sistema de representación a otro es muy a menudo el umbral crítico para el progreso en el aprendizaje y para la resolución de problemas. (Duval, 2006b, p. 149)

El proceso de enseñanza de las matemáticas por parte de los profesores juega un papel fundamental en el aprendizaje de la misma y en la habilidad para aplicarlas por parte de los estudiantes. La enseñanza tradicional es una de las causas fundamentales de la dificultad en el aprendizaje de las matemáticas y en particular del concepto de función. (Hitt, 1996; Quiroga *et al*, 2004)

2.3. LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

El problema de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es un reto por alcanzar; los factores que inciden en el problema son múltiples y de ahí nace su complejidad. Tradicionalmente la matemática es de las materias que generalmente menos entusiasma a los estudiantes, rechazándolas en la mayoría de los casos al considerarla difícil y carente de uso posterior en la vida. Esto es consecuencia, hasta cierto punto, por la falta de vinculación de su contenido con la realidad, nos referimos a los casos en los cuales el docente utiliza ejemplos en sus clases de aplicación a sociedades que nada tienen que ver con la realidad del país donde se inserta el estudiante y sobre cuya sociedad está llamado a actuar para transformarla.

De acuerdo con la perspectiva situacionistas/prágmaticos-sociohistoricos (Greeno *et al*, 1996) el conocimiento está distribuido entre las personas y sus entornos, incluyendo los objetos, artefactos, herramientas, libros, y las comunidades de que forman parte.

El aprendizaje en esta perspectiva, es un atributo de los grupos que llevan a cabo actividades de cooperación y un atributo de los individuos que participan en las comunidades de las que son miembros. Aprender a través de un grupo o individuo implica estar en sintonía con las regularidades de las actividades, que incluyen las limitaciones y las posibilidades de las prácticas sociales y de los materiales y los sistemas tecnológicos de los ambientes. (Greeno *et al*, 1996, p. 20)

2.3.1. El aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva de Modelos y Modelación

Un enfoque de mucha ayuda para describir y comprender lo que significa lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, es la perspectiva de modelos y modelación (Lesh y Doerr, 2003; Reid *et al*, 2012). En esta perspectiva los modelos son los sistemas conceptuales utilizados para interpretar situaciones matemáticas, cuantificar, dimensionar, coordinar, sistematizar o matematizar (en general) objetos, relaciones, operaciones, transformaciones, patrones, regularidades, u otras características sistémicas de situaciones de aprendizaje o problemas matemáticos. (Lesh y Doerr, 2003)

De acuerdo con Lesh y Doerr (2003), un estudiante aprende matemáticas cuando resuelve situaciones en donde tiene la necesidad de crear modelos, es decir, situaciones que obliguen al estudiante a desarrollar actividades que implican el uso de herramientas que pueden ser manipulables, compartibles, modificables y reutilizables para predecir, describir, manipular, explicar las situaciones dadas en las que el producto es más complejo y estructurado a diferencia de simples respuestas a preguntas prescriptivas.

Los estudiantes no sólo necesitan utilizar sistemas conceptuales y construcciones existentes, también a menudo necesitan modificar o extender, integrar, diferenciar, revisar o reorganizar sus interpretaciones matemáticas iniciales. Además, el desarrollo de ideas significativas se puede producir sin la guía directa de libros de texto o del maestro. (Lesh y Doerr, 2003)

El diseño de las tareas que los estudiantes deben resolver es un punto clave en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Típicamente los conceptos matemáticos que se espera que los estudiantes aprendan, determinan de antemano el diseño del tipo de tarea matemática a proponer en el aula. La matemática radica en el tipo de pregunta, en el tipo de respuesta (s), y a lo largo del camino (es decir, el proceso), desde la pregunta hasta la respuesta. (Carmona y Greinstein, 2010)

Las tareas matemáticas deben estar diseñadas de tal manera que presenten claramente lo dado y las metas, pero que permitan múltiples interpretaciones del problema, y puedan provocar múltiples soluciones que sean matemáticamente válidas para alcanzar los objetivos del problema (Carmona Greinstein, 2010). En esta perspectiva la resolución de problemas se considera parte del proceso de modelación de situaciones.

2.3.2. La resolución de problemas y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Schoenfeld (1985, 1992) afirma que aprender matemáticas se relaciona con que el estudiante desarrolle o construya ideas matemáticas. Un aspecto esencial en el desarrollo de estas ideas es el proceso de "formular y resolver problemas", el cual se debe promover en el aula ya que éste desempeña un papel muy importante para desarrollar en el estudiante habilidades como analizar casos particulares, descubrir patrones y relaciones, plantear conjeturas, hacer generalizaciones y justificar sus resultados. (Schoenfeld, 1992)

De acuerdo con Santos (2002) los principios fundamentales que le dan sustento y pertinencia a la resolución de problemas son:

a) El estudiante debe tener la oportunidad de problematizar su aprendizaje de la disciplina.
b) Los métodos de instrucción aparte de ser un instrumento para adquirir información, también son prácticas en donde los estudiantes aprenden a participar.
c) Diseño actividades dónde el conocimiento pueda ser desarrollado.
d) El maestro puede definir o delimitar el estudio de un tema por medio de la formulación de algún problema para la clase; pero los estudiantes deben tomar un papel activo al cuestionar el problema, buscar formas de solución y plantear otros problemas. (Santos, 2002, p. 155)

Los contextos de los problemas pueden variar desde las experiencias familiares o escolares del alumnado a las aplicaciones científicas o del mundo laboral. Los buenos problemas son aquellos que integran múltiples temas e involucran matemáticas significativas.

De acuerdo con Santos (1997) un problema es una tarea o situación en la cual aparecen las siguientes componentes:

a) La existencia de un interés, es decir, una persona o grupo de personas que desean encontrar una solución.
b) La no existencia de una solución inmediata, es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la aplicación directa de un algoritmo o conjunto de reglas no es suficiente para determinar la solución.
c) La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico, etc) aquí también se considera que el problema pueda tener más de una solución. (Santos, 1997, p. 30)

El alumno se debe enfrentar a una variedad de situaciones en donde sea necesario analizar y evaluar diversas estrategias en las diversas fases de la solución. Es decir,

> En el entendimiento del problema, el diseño e implementación de algún plan de solución, y en la verificación de la solución y la búsqueda de conexiones el estudiante usará diagramas, tablas, ejemplos y contraejemplos así como los ajustes necesarios para avanzar o resolver el problema. (Santos, 1997, p. 31)

2.3.2.1. *El papel del maestro y el estudiante en la resolución de problemas*

Santos (2002) menciona que la responsabilidad del maestro consiste en desarrollar en el salón de clases una comunidad donde se problematice el estudio de las matemáticas. En esta comunidad, la actividad central es la discusión de los métodos que puedan ayudar a resolver los problemas identificados.

El papel del maestro es proveer información y preparar las tareas que ayuden a problematizar la disciplina por parte de los estudiantes (Santos, 2002). Es decir, el maestro tendrá un papel activo en la selección y presentación de las tareas, así como en promover la discusión entre los estudiantes, en la cual él actúa como moderador.

Por otro lado, los estudiantes adquieren el compromiso y responsabilidad de pertenecer a una comunidad donde participen activamente en el desarrollo y monitoreo del aprendizaje (Greeno, 1996). Así, deben compartir los resultados de sus exploraciones y presentar justificaciones y explicaciones de los métodos que empleen en sus conclusiones. En este sentido, Santos (2002) menciona:

> El aprender incluye el aprender de los otros, tomar ventaja de sus ideas y de los resultados de sus investigaciones; esto requiere que los estudiantes aprendan a escuchar a sus compañeros y respondan adecuadamente a sus puntos de vistas e inquietudes. (Santos, 2002, p. 59)

2.4. EL ANÁLISIS DIDÁCTICO, DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Los profesores, en su práctica docente, se enfrentan frecuentemente al problema de planificación de sus clases ya que los diseños curriculares globales no aportan información suficiente acerca de los principios, herramientas y procedimientos, que permitan diseñar y evaluar las tareas y actividades de enseñanza-aprendizaje. "Usualmente los profesores planifican y realizan sus clases con ayuda de su experiencia y de los documentos y materiales de apoyo disponibles, y muchos de ellos se basan exclusivamente en las propuestas de los libros de texto". (Gómez, 2002, p. 251)

El análisis didáctico representa una visión ideal de cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza-aprendizaje. Se centra en el procedimiento en virtud del cual el profesor planifica, lleva a la práctica y evalúa una unidad didáctica, una hora de clase o una porción de una clase. Entendiendo por unidad didáctica "una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos". (Gómez, 2002, p. 257)

El ciclo se inicia con la determinación, por parte del docente, de la comprensión que los estudiantes tienen en ese momento, de los contenidos que se pretenden tratar y de los objetivos que se quieren lograr. (Gómez, 2002)

El diseño curricular global delimita inicialmente esos objetivos y contenidos. Pero la determinación de los objetivos específicos que se deben buscar y de los contenidos matemáticos particulares que se deben tratar también depende del resultado del ciclo anterior del análisis didáctico.

El profesor debe hacer una descripción de la comprensión de sus estudiantes sobre la estructura matemática en cuestión (Sección 3.2.1 de esta tesis). Esta descripción deberá identificar:

a) Las tareas que sus estudiantes pueden resolver,
b) Las tareas que no pueden resolver,
c) Los errores en los que los estudiantes han incurrido al abordar las tareas,
d) Las dificultades que subyacen a esos errores,
e) Los obstáculos que es necesario superar para resolver esas dificultades. (Gómez, 2002, p. 261)

De igual manera el docente debe realizar cuatro tipos de análisis:

a) análisis de contenido: El análisis de contenido es un análisis de las matemáticas escolares. Su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula.
b) análisis cognitivo: describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza-aprendizaje. El análisis cognitivo es un análisis *a priori*. Es, por un lado, la identificación, descripción y caracterización sistemática, detallada y fundamentada de las tareas que los escolares pueden resolver en ese momento y de aquellas que deberían poder abordar durante la sesión que se está planificando, es también la identificación, descripción y caracterización de los errores en los que los escolares pueden incurrir al abordar dichas tareas, de las dificultades que subyacen a esos errores y de los obstáculos que es necesario superar para resolver dichas dificultades.
c) análisis de instrucción: Es la identificación y descripción de las tareas que es posible utilizar en el diseño de las actividades de enseñanza-aprendizaje.

d) análisis de actuación: Es la última fase del análisis didáctico, en la cual el profesor recoge la información para el análisis de actuación durante la puesta en práctica de las actividades y basándose en las actuaciones de los escolares. El resultado del análisis de actuación es la descripción sistemática de la comprensión de los escolares con el propósito de proporcionar información que sea útil para el inicio de un nuevo ciclo del análisis didáctico. (Gómez, 2002, p. 262)

2.4.1. Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA)

En 1995, Martin Simon introdujo la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje como parte de su modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas (Simon,2004; Gómez y Lupiañéz, 2007).

La construcción de una THA se fundamenta en los cuatro supuestos siguientes.

1. La construcción de THA se basa en la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción.
2. Una trayectoria hipotética de aprendizaje es el vehículo para planificar el aprendizaje de unos conceptos matemáticos concretos.
3. Las tareas matemáticas proporcionan las herramientas para promover el aprendizaje de unos conceptos matemáticos concretos y, por lo tanto, son un elemento clave del proceso de instrucción.
4. Dada la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el profesor se verá obligado a modificar sistemáticamente cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje. (Gómez y Lupiañéz, 2007, p. 81)

El proceso comienza con la fijación de metas para los estudiantes, la cual se da a menudo con relación a una tarea que ha sido planteada por el profesor. Los objetivos que podemos establecer para los estudiantes están en función de sus concepciones actuales y relacionados con la tarea en cuestión (Gómez, 2002). Los objetivos de los estudiantes no deben confundirse con el objetivo del profesor respecto al aprendizaje de los estudiantes.

Después de haber fijado un objetivo, se implementa la actividad diseñada (o conjunto de actividades) en el salón de clase, en un esfuerzo por alcanzar el objetivo. Para tratar de lograr este objetivo, los estudiantes crean registros mentales, ordenan y comparan; lo que les conduce a identificar patrones, es decir, las relaciones entre la actividad y efectos (Gómez, 2002). Esta abstracción reflexiva de una nueva actividad-efecto (para el alumno) es el mecanismo por el cual se construye un nuevo concepto.

El profesor debe participar de manera activa en la construcción de las THA, ya que en el último de los supuestos debe, con base a la actuación de los estudiantes, modificar aspectos de la THA.

El análisis didáctico es un punto clave para el diseño de la THA, con el análisis de contenido y cognitivo se diseña la actividad (o actividades), después de la implementación se realiza el análisis de actuación con lo cual se puede validar la pertinencia de la THA.

2.5. El uso de representaciones

El concepto de función lineal puede ser abordado en el aula tomando en cuenta las consideraciones señaladas en las secciones 2.3 y 2.3.1. En particular, mediante la resolución de problemas y el uso de sus representaciones (Duval, 2006a, 2006b): la algebraica, la tabular y la gráfica; a través de la manipulación de estas tres formas de representación o tratamiento[5] y la conversión entre ellas, por ejemplo, de la algebraica a la tabular, de la tabular a la gráfica, o de la gráfica a la algebraica. La interacción con estas representaciones y la exitosa conversión entre ellas, permite al estudiante explorar algunas nociones acerca del concepto de función. Por lo que resulta de gran interés prestar atención a lo que el

[5] De acuerdo con Duval (2006a, 2006b) La transformación de la representación dentro del mismo registro donde se ha formado constituye lo que se denomina tratamiento de una representación. La función que cumple dentro del sistema semiótico está asociada a la ganancia de información, por ejemplo, se realiza un tratamiento cuando se tiene una ecuación y se hace una simplificación de la misma.

estudiante realiza al convertir una forma de representación a otra, ya que, por ejemplo, algunas conversiones no son directas, sino que requieren de alguna otra forma de representación intermedia para poder efectuarse. Como es el caso del proceso de ir de lo algebraico a lo gráfico, en que el estudiante en ocasiones acude, como paso intermedio, a la tabulación de la expresión algebraica, en donde obtiene una serie de valores que le permiten ubicar puntos en el plano cartesiano y así construye la gráfica que corresponde a la función dada.

Los elementos relevantes a considerar acerca de los aportes de Duval, son la importancia de trabajar con los diferentes registros de representación semiótica, y la coordinación entre estos, ya que juegan un papel fundamental en la actividad matemática. Duval (2006b) afirma que:

> Los objetos matemáticos, en contraste con los fenómenos de la astronomía, la física, la química, la biología, etc, no son accesibles a la percepción o por instrumentos (microscopios, telescopios, aparatos de medición). La única manera de tener acceso a ellos y tratar con ellos es el uso de signos y representaciones semióticas. (p. 107)

Podríamos decir que el desarrollo de los conceptos matemáticos es una aprehensión conceptual y la actividad con los objetos matemáticos sólo se da a través de las representaciones semióticas. Es decir, un concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, dando solidez al concepto. (Duval, 1998)

Cabe destacar dos ideas importantes del párrafo anterior: coordinación y conversión. En otras palabras, la aprehensión conceptual de un objeto matemático sólo se logrará si existe actividad (cognitiva) con registros de representación, la cual deberá realizarse con la coordinación de al menos dos de ellos.

2.6. LA EVALUACIÓN

Otro aspecto importante a tomar en cuenta es la evaluación, la cual debe proporcionar información útil tanto a los estudiantes como a los profesores. Las tareas que se propongan en una evaluación transmiten información a los estudiantes acerca del conocimiento matemático y las capacidades que se evalúan. Las evaluaciones deben contener actividades que sean coherentes con las hechas en clase y en ocasiones hasta las mismas. (NCTM, 2007)

> La evaluación debería ser algo más que un mero examen al final del período de enseñanza para ver cómo trabajan los alumnos en condiciones especiales; debería constituir una parte integral de la enseñanza que informe al profesorado y le sirva de guía para la toma de decisiones. No sólo debería hacerse *a* los estudiantes sino también *para* los estudiantes, para guiar y mejorar su aprendizaje. (NCTM, 2007, p. 23)

Para lograr un aprendizaje de calidad, la evaluación y la enseñanza deben estar integradas de tal manera que aquella llegue a formar una parte rutinaria de la práctica docente. Además de las evaluaciones como los test y exámenes, los docentes deben estar continuamente recabando información a cerca del avance de los estudiantes mediante preguntas, observación e interacción durante el desarrollo de las clases.

Cuando la evaluación está bien diseñada, ayuda al profesor en la toma de decisiones en cuanto a los contenidos o formas de enseñanza (evaluación formativa), también se puede usar para juzgar los logros de los estudiantes (evaluación sumativa) (NCTM, 2000, p. 25). Es importante también, con el fin de hacer que la evaluación sea objetiva, que el profesor fije su atención en identificar las formas de pensamiento de los estudiantes al realizar las tareas más que centrarse únicamente en considerar respuestas correctas o incorrectas o puntualizar los errores o conceptos falsos (NCTM, 1997; Carmona y Lesh, 2012). Reuniendo datos de una variedad de fuentes tales como la participación del estudiante en clase, las tareas, examenes o entrevistas, el docente tiene una imagen más exacta de lo que el alumno sabe y puede hacer. Algo muy importante es que el docente fije su atención en el hecho de que los estudiantes exhiben ciclos o episodios de comprensión en las distintas fases de resolución de los problemas, que les permite refinar constantemente sus modelos de solución (Lesh *et al*, 2000). Esto es, en sus acercamientos, ellos incorporan una diversidad de formas de representación y generan ciclos de entendimiento que evolucionan a través de sus interpretaciones iniciales, intermedias y finales de las tareas. En general, al trabajar los problemas, los estudiantes muestran varios ciclos de modelación en donde sus prercepciones iniciales, descripciones, explicaciones son gradualmente refinados o rechazados con base en la retroalimentación y discusión de sus ideas dentro de una comunidad.

> En la resolución de problemas varios niveles y tipos de respuesta casi siempre son posibles (donde una es la mejor dependiendo del propósito y circunstancias), y los estudiantes mismos deben ser capaces de juzgar el valor relativo o formas alternativas de pensar el problema. De otra manera, el estudiante no tiene forma de conocer que debe ir mas allá de la forma inicial de pensar el problema; y tampoco tiene forma de juzgar las ventajas y desventajas de una forma alternativa de pensar. (Lesh y Doerr, 2003, p. 18)

La identificación de episodios de comprensión, en términos del uso de recursos matemáticos, estrategias y representaciones, genera información útil para analizar y evaluar el desempeño de los estudiantes.

Los elementos o constructos teóricos que conforman el marco conceptual de esta tesis fueron utilizados de la siguiente manera (Figura 2.4). El análisis didáctico (Gómez, 2002) así como las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Simon, 1995) fueron elementos básicos para la elaboración de la tesis. Durante el diseño de la secuencia de aprendizaje se utilizaron aportaciones de Lesh y Doerr (2003) respecto a la importancia de apoyar el desarrollo de ciclos de entendimiento y refinamiento del conocimiento al resolver problemas o situaciones.

Se revisó la teoría de Duval (2006a, 2006b) para elegir el tipo de problemas o tareas y para evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Es decir, las actividades de la secuencia didáctica fueron diseñadas de tal manera que el estudiante pudiera identificar las ideas y conceptos matemáticos asociados a la función lineal. Se pretendió que las actividades no fueran de solución inmediata, es decir, que propiciaran el surgimiento de diferentes estrategias para resolverlas, ya sea mediante un registros gráficos, algebraicos o numéricos. De tal manera que los estudiantes hicieran uso de los diferentes registros de representación para responder a cada una de las situaciones presentadas. El ambiente de resolución de problemas (Santos, 1997, 2002) fue clave para la implementación de las actividades.

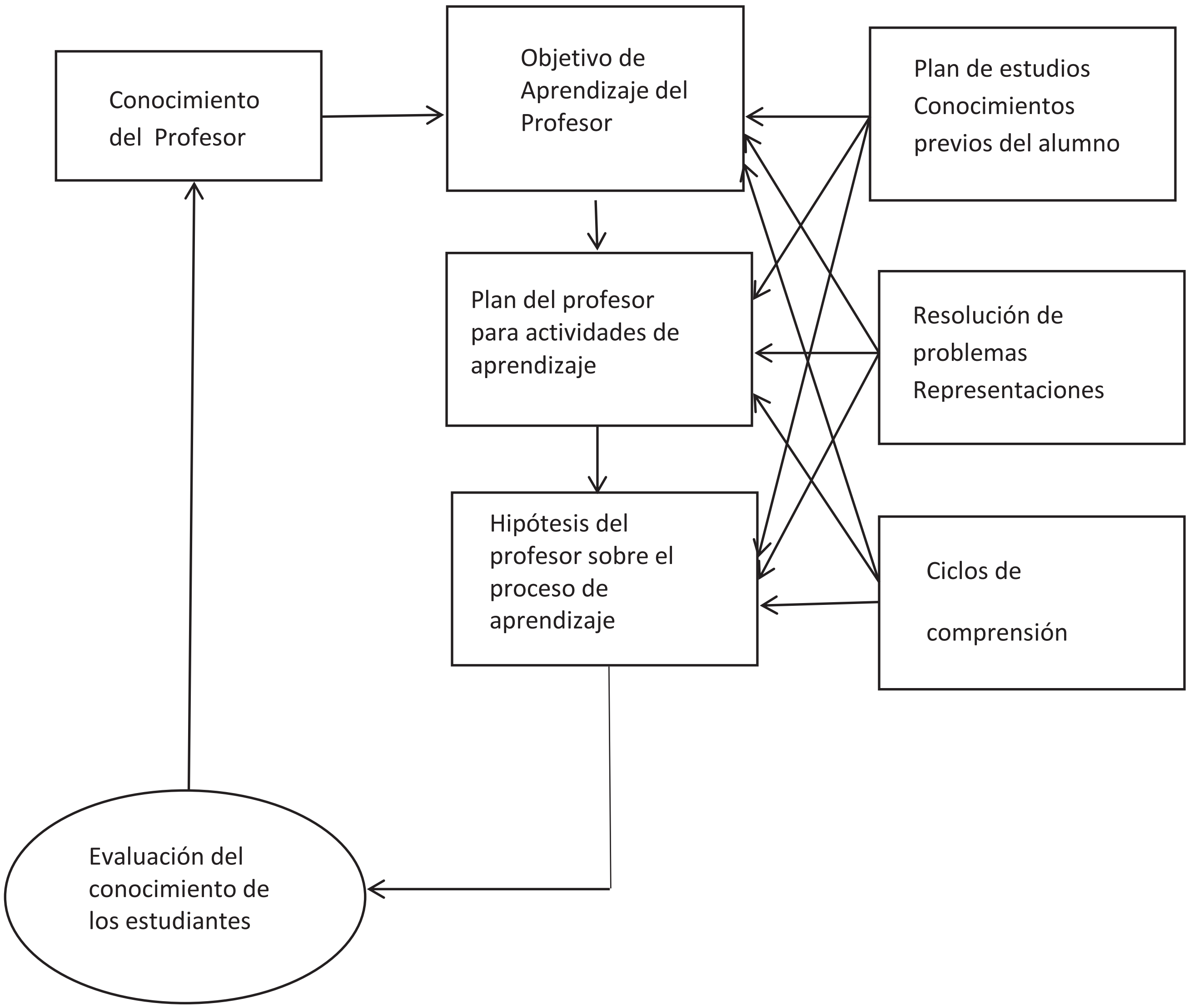


Figura 2.4. Ciclo de Enseñanza de las matemáticas. Diagrama adaptado de Gómez y Lupiañez (2007)

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se describe el objetivo y las características de la propuesta didáctica, el contexto institucional donde se implementó, las fases del diseño de la propuesta y los criterios que se siguieron para implementarla y evaluarla.

3.1. CONTEXTO INSTITUCIONAL Y LA POBLACIÓN DE ESTUDIANTES PARTICIPANTES

La propuesta didáctica (Anexo A) de enseñanza-aprendizaje de la función lineal se diseñó para estudiantes de licenciatura de un curso de Matemáticas Generales (DCI, 2007), el cual se ofrece a los estudiantes de licenciatura de primer semestre. El programa del curso contempla cuatro unidades:

Unidad 1. Álgebra

Unidad 2. Variación y progresiones

Unidad 3. Funciones

Unidad 4. Probabilidad y estadística.

De acuerdo con el programa de estudios del curso de matemáticas generales se pretende que orientar al alumno a adquirir destreza, gusto y seguridad en la utilización de los conocimientos (conceptos y procedimientos) mínimos de matemáticas que requiere cada estudiante de nivel superior para el análisis de la información básica, estadística.

Trata de desarrollar la habilidad para elaborar modelos matemáticos sencillos de diversas situaciones problemáticas en distintas áreas de conocimiento y de ejercitar distintos procesos del razonamiento lógico tales como deducción, inducción, análisis y síntesis, generalización, comparación, clasificación, etc. (DCI, 2007)

En la unidad I se abordan los temas de exponentes, ecuaciones con una incógnita, sistemas de ecuaciones y desigualdades. En la segunda de las unidades se contemplan los temas de variación, proporción, progresiones aritméticas y geométricas. En la tercera unidad se estudian las funciones haciendo énfasis en las aplicaciones. En la cuarta unidad se contemplan aspectos de teoría de conjuntos, técnicas de conteo, probabilidad y estadística. En la tercera unidad del curso matemáticas generales se estudian las funciones dentro de las cuales, el primer tipo son las funciones lineales. (DCI, 2007)

La propuesta se implementó a un grupo de 10 estudiantes. Este grupo estaba constituido por 8 estudiantes repetidores de la materia, un estudiante la cursaba por primera vez y uno la tomaba como materia de apoyo. Sus edades variaban de los 19 a los 22 años.

Al momento de trabajar las actividades de la secuencia didáctica (Anexo A) aquí descrita, los estudiantes ya habían estudiado los temas correspondientes a las dos primeras unidades del curso de matemáticas generales (DCI, 2007), en las cuales se desarrolló conocimiento alrededor de los temas de exponentes tanto enteros como fraccionarios, ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2x2 y 3x3, progresiones tanto aritméticas como geométricas, variación y proporción.

3.2. PROCESO DE ELABORACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

De acuerdo con el análisis didáctico (Gómez, 2002), es importante identificar los identificar los conceptos asociados con la función lineal como: pendiente, intersección (ceros), variación, proporción, tasa de cambio, ecuación. Se pretendía determinar los conceptos de aprendizaje a desarrollar en los estudiantes mediante la propuesta didáctica.

Pensando en el conocimiento y habilidades que se deseaba alcanzar alrededor de estos conceptos se diseñó un instrumento de evaluación con problemas cuyos procedimientos de solución de los estudiantes permitirían identificar el nivel de conocimiento alcanzado por ellos después de trabajar las actividades de la secuencia. Posteriormente, se diseñó la secuencia didáctica.

Para el diseño de la secuencia didáctica se partió del supuesto que los estudiantes tienen conocimientos sobre algunos tópicos tales como factorización, leyes de los exponentes, ecuación, sistemas de coordenadas cartesianas.

Al trabajar la secuencia didáctica en el aula, se esperaba que los estudiantes trabajaran con las diferentes formas de representación de una función, esto es, dibujar la gráfica, obtener la representación tabular, obtener la representación simbólica de una función y utilizar aquella(s) que le permitiera describir, interpretar, modelar y resolver una situación relacionada con el contexto de la vida real.

Es importante señalar que antes de aplicar la secuencia al grupo, cuyos resultados se describen en este documento, se realizó una prueba piloto con un grupo diferente de estudiantes, también de primer semestre de licenciatura para recabar información acerca del diseño de las actividades. Es decir, se requería conocer si las instrucciones de las actividades eran claras para todos los alumnos y propiciaban el desarrollo de conocimiento. Con la información recabada se inició un proceso de reflexión que dio lugar a un rediseño de las actividades y por lo tanto de la secuencia didáctica en cuanto al orden (como estaban organizadas las actividades), las instrucciones y lo que los estudiantes podían hacer.

3.2.1. Diseño y selección de las actividades de la secuencia

Un aspecto importante en la comprensión del concepto de función lineal (y en general del concepto de función) es determinar cuándo existe una dependencia entre dos tipos de cantidades. En ese sentido las actividades se pensaron para que los estudiantes analizaran y describieran las cantidades involucradas y determinaran alguna dependencia entre éstas.

En las actividades se contemplaron los conceptos matemáticos asociados a la función lineal: pendiente, intersección (ceros), variación, proporción, tasa de cambio, ecuación. Las actividades y problemas se ordenaron en forma creciente en cuanto a complejidad en su resolución.

Las primeras actividades fueron diseñadas para que el estudiante identificara la pendiente e intersección (ceros) en la función lineal a través de actividades matemáticas. Enseguida se brindaron actividades y problemas cuya resolución propiciara que los estudiantes le dieran significado a estos conceptos y los relacionaran con los de variación, proporción y tasa de cambio en el contexto de la situación planteada.

Poder identificar, construir, describir y usar un modelo lineal que se puede ajustar a un conjunto de datos es una actividad muy importante cuando se analizan fenómenos de la vida cotidiana, en ese sentido, algunas de las actividades finales están pensadas para que los estudiantes ajusten un modelo lineal a un conjunto de datos y utilicen este modelo para hacer predicciones.

Las representaciones y su adecuado manejo (tratamiento y conversión) son de gran importancia para darle solidez al concepto de función lineal y los conceptos asociados, por eso en las actividades se consideró que los estudiantes debían trabajar siempre con al menos dos de las representaciones de la función lineal.

En seguida se describe brevemente cada una de las sesiones, las actividades que las conformaron y los objetivos de cada una de ellas. Posteriormente, en la sección 3.3 se describe la forma de implementación de las actividades en cada una de las sesiones. Las actividades están diseñadas para trabajarlas en 4 sesiones, tres de ellas de dos horas y una de una hora. La secuencia completa puede revisarse en el Anexo A.

3.2.1.1. *Sesión 1*

En la primera sesión se propusieron cuatro actividades para trabajarlas en un tiempo de dos horas.

Actividad 1. En la primera actividad se pretendía que los estudiantes tuvieran el primer acercamiento con las representaciones simbólica y gráfica de la función lineal. Que observaran, a partir de la construcción de representaciones gráficas, el efecto que producía variar el parámetro b manteniendo constante el valor de la pendiente en la representación $y = ax + b$ de la función lineal.

Para cerrar esta actividad se programó una discusión grupal. Posteriormente, los estudiantes debían escribir la representación simbólica de tres funciones lineales tales que su intersección con el eje Y fuera el punto $(0,5)$, $(0, 3/4)$ y $(0,-0.25)$ respectivamente. Se pretendía que los estudiantes tuvieran claro que el parámetro b era la intersección de la gráfica con el eje Y.

Actividad 2. El objetivo era que los estudiantes observaran cómo cambiaba la posición de la gráfica cuando se hacía variar el valor del parámetro a (pendiente) y se mantuviera fijo el valor del parámetro b. Que relacionaran el signo con la orientación de la gráfica (inclinación hacia la derecha o izquierda). Los estudiantes debían graficar diferentes funciones lineales (Anexo A).

En esta actividad, los estudiantes podían tener dificultades para visualizar la pendiente en la representación gráfica, es decir, para observar cómo variaba la variable y con respecto a la variación de la variable x. Para apoyar a los estudiantes en la visualización de la pendiente se utilizó la figura 4.7 como ejemplo. El docente explicó a los estudiantes que a medida que la variable x aumenta 3 unidades, la variable y aumentaba 2 unidades.

Actividad 3. Con la experiencia de las dos actividades anteriores, los alumnos debían trazar la gráfica de la función lineal dada (Anexo A), identificar la intersección de la gráfica con el eje Y e identificar la pendiente.

Actividad 4. Para el inciso a) se le proporcionó a las parejas de estudiantes la representación algebraica de una función lineal y se esperaba que trazaran su gráfica para visualizar la intersección y la pendiente. Para el inciso b) se esperaba que los estudiantes determinaran la expresión simbólica de la función lineal a partir de la representación gráfica, los estudiantes debían observar el punto de intersección de la gráfica con el eje Y para obtener el valor del parámetro b, también los estudiantes debían observar la variación de la variable y con respecto a la variable x para poder determinar el parámetro a (pendiente) y así escribir la expresión simbólica de cada una de las funciones dadas (Anexo A).

3.2.1.2. *Sesión 2*

Para la segunda sesión se propusieron tres actividades (Anexo A) para realizarlas en un tiempo de dos horas.

Actividad 1. En la primera actividad el objetivo era que los alumnos recordaran y usaran la fórmula para calcular la pendiente de una recta conociendo dos de sus puntos.

Actividad 2. El objetivo de la actividad 2 era que los estudiantes obtuvieran la expresión analítica de una función lineal cuando se conocen dos de sus puntos. Para esto se propusieron dos ejercicios en los cuales se le proporcionaron al estudiante dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y debían hallar la pendiente como en la actividad anterior y el valor del parámetro b. Esto implicaba que el estudiante tratara la representación simbólica de la función lineal.

Actividad 3. Escala de conversión.

Como cierre de esta sesión se le presentó al estudiante una situación en donde debía hallar la función lineal que sirviera para convertir de grados Celsius a Fahrenheit. Además, debía interpretar el significado del valor de la pendiente y de las intersecciones de la gráfica con los ejes de coordenadas.

3.2.1.3. *Sesión 3*

Para esta sesión se propuso una sola actividad (Anexo A) para trabajar en un tiempo de una hora.

Actividad 1. Las palomitas

En esta actividad se le presentó al estudiante una situación en la cual debía generar un modelo lineal que le sirviera para determinar el nivel de venta de las bolsas de palomitas en término del precio e interpretar los parámetros de la función hallada. Para responder algunas de las preguntas debía formular y resolver una ecuación lineal. Esta actividad se basa en la propuesta sugerida en los documentos de la NCTM (2004).

3.2.1.4. *Sesión 4*

Las dos actividades propuestas para esta sesión (Anexo A) se trabajaron en un tiempo de dos horas.

Actividad 1. El objetivo era que los estudiantes pudieran, a partir de la representación tabular de una función, ajustar un modelo lineal que representara al conjunto de datos. Los estudiantes debían usar la expresión simbólica para hacer predicciones del nivel de CO_2 para algunos datos que no aparecían en la tabla.

Actividad 2. En esta actividad se les presentó a los estudiantes una situación en donde debían analizar tres tipos de procesos para decidir cuál era el óptimo. En esta actividad debían determinar la función lineal que representara cada proceso y hacer uso de su representación gráfica para decidir cuál proceso es el que convenía en términos del número de artículos producidos.

3.3. El trabajo en el aula

Las actividades propuestas se trabajaron en un ambiente de resolución de problemas. Esto significa que se propició que los estudiantes desarrollaran habilidades, como la de comunicar de forma verbal y escrita, y además validar sus resultados.

Cada sesión se desarrolló en tres fases. La primera fase consistió de una introducción por parte del profesor. En esta fase el profesor explicó a los estudiantes la forma en que trabajarían así como los conceptos a estudiar. La segunda fase consistió en la entrega de las actividades a las parejas de estudiantes. Los estudiantes de cada pareja discutieron acerca de la solución de la actividad; posteriormente, redactaron sus soluciones. En esta fase el profesor respondió a todas las preguntas hechas por los estudiantes. En la tercera fase se realizó la discusión grupal para homogenizar los resultados. Una de las parejas explicaba sus conclusiones, mientras que las demás parejas comparaban sus resultados. El papel del profesor fue de guía y moderador de la discusión. Planteó preguntas, propuso situaciones, propició reflexiones con el objetivo de resaltar aspectos matemáticamente relevantes con respecto a los conceptos asociados a la función lineal.

Propiciar el desarrollo de la habilidad de comunicación tanto verbal como escrita fue importante, por ello los estudiantes trabajaron las actividades en parejas y la actividad grupal. Además, las parejas debían entregar por escrito todos los procedimientos empleados en la resolución de las actividades.

3.4. EVALUACIÓN

La evaluación debe ser un proceso continuo que permita observar el desarrollo del aprendizaje del estudiante NCTM (2000). Da información acerca de los que los estudiantes aprendieron. En esta tesis se consideró la evaluación durante cada una de las sesiones tomando en cuenta las participaciones de los estudiantes tanto en parejas como en la discusión grupal, los procesos de solución de las actividades y su desempeño al trabajar las actividades del instrumento de evaluación.

Para la descripción y análisis del desarrollo de conocimiento de los estudiantes se utilizaron como criterios de evaluación los ciclos de comprensión de la perspectiva de modelos y modelación (Lesh, 2012) y las aportaciones de Duval (2006), en términos de la conversión y tratamiento de registros de representación. Ambas teorías fueron descritas en el Capítulo 2. Los ciclos de comprensión se identificaron a partir de la modificación de esquemas que los estudiantes fueron mostrando al resolver las actividades y problemas. Primero se observó una comprensión aislada de conceptos, posteriormente fueron integrándolos y finalmente se observó el uso que hicieron de los conceptos asociados al concepto de función y la integración que hicieron de éstos en la generación de modelos para solucionar los problemas. Por ejemplo, en la sesión 1 la actividad dos tenía como objetivo que los estudiantes visualizaran de manera geométrica la pendiente. Después de trabajar esta actividad y de la discusión grupal, los estudiantes solo pudieron observar la relación entre el signo de la pendiente y la posición de la gráfica este fue su primer ciclo de comprensión. En la segunda sesión los estudiantes calcularon el valor de la pendiente usando dos de los puntos de la gráfica y usando la fórmula. Posteriormente, utilizaron esto en la resolución de un problema de aplicación en el cual debían calcular la pendiente y darle significado en términos del contexto de la situación presentada; es decir, los estudiantes no sólo debían de hacer los cálculos sino también darle sentido al valor de la pendiente que estaban calculando. Los estudiantes refinaron sus conocimientos y lograron desarrollar otro ciclo de comprensión.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS ANÁLISIS

En este capítulo se presentan los resultados y el análisis de los datos obtenidos de la implementación de la secuencia didáctica en el aula. Se documenta el proceso de desarrollo de conocimiento de los estudiantes en cuanto al concepto de función lineal, mediante la descripción y el análisis de los procedimientos llevados a cabo por ellos al resolver cada una de las actividades. Se presentan dificultades y logros de aprendizaje de los estudiantes así como el papel del profesor para apoyar el desarrollo de conocimiento. Se inicia con una breve discusión respecto a los resultados obtenidos a partir de la prueba piloto, y posteriormente se presenta la discusión de los resultados obtenidos a partir de la implementación de la secuencia didáctica, la cual fue modificada con base en los resultados de la prueba piloto.

4.1. BREVES COMENTARIOS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA EN LA FASE PILOTO

La implementación de la fase piloto de la secuencia se realizó con un grupo de 14 estudiantes de la Licenciatura en Manejo de Recursos Naturales que cursaban la materia de matemáticas generales (DCI, 2007). La implementación se hizo en tres sesiones, dos de dos horas y una de una hora.

La implementación fue de gran ayuda ya que mostró algunas de las dificultades, por parte de los estudiantes, en cuanto a la comprensión de las preguntas que tenían que responder como parte de las actividades de la secuencia. De la misma manera se observó que la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para visualizar la pendiente a partir de la representación gráfica de la función lineal por esto en la aplicación de la secuencia en su versión final fue necesaria la intervención del docente utilizando la figura 4.7 para apoyar a los estudiantes. Los resultados permitieron evaluar la secuencia y hacer las modificaciones pertinentes en la redacción de algunas actividades. También fue necesario hacer cambios en el orden propuesto de las actividades para que la complejidad fuera creciente y apoyara el surgimiento de niveles de comprensión. En la fase piloto, por ejemplo, la segunda de las sesiones tenía como primera actividad un problema en donde los estudiantes debían determinar la función lineal asociada a una situación (Actividad 3 sesión 2, Anexo A). La problemática que se presentó fue que los estudiantes no tenían conocimientos previos acerca de cómo calcular la pendiente y la ordenada al origen para la expresión algebraica, para solucionar esta problemática se introdujeron actividades previas con el objetivo que los estudiante se familiarizaran con los cálculos para posteriormente transferir sus conocimientos en la resolución de los problemas planteados en las siguientes actividades (Actividad 1 y 2 de la sesión 2, Anexo A).

Es importante mencionar que los resultados observados en esta fase mostraron que la planeación que se hace en cuanto al orden, redacción y tiempo dedicado a las actividades no siempre se concretan como el docente[6] piensa. Por lo tanto es necesario hacer las modificaciones pertinentes con el fin de lograr los objetivos planeados.

4.2. Resultados y análisis de la implementación de la Secuencia didáctica en una segunda fase

La secuencia rediseñada a partir de las observaciones derivadas del estudio piloto se implementó con un nuevo grupo de estudiantes. Los resultados obtenidos a partir de la implementación de la secuencia en esta nueva fase y el análisis de los mismos se detallan sesión por sesión. Se utilizan los criterios de análisis descritos en el Capítulo 3.

4.2.1. Análisis de las actividades de la sesión 1

La primera sesión, de dos horas, se trabajó con 10 estudiantes acomodados en parejas (las cuales se numeraron del 1 al 5 en este documento para reportar sus resultados). La forma en que se formaron las parejas fue de acuerdo con el criterio del profesor, tomando en cuenta la participación de los estudiantes en las clases anteriores, su rendimiento en exámenes parciales y tareas. Se procuró que cada

[6] En este documento las palabras docente y profesor se usan como sinónimos.

pareja estuviera conformada por un estudiante destacado y uno de bajo rendimiento.

Las actividades de esta sesión tenían como objetivo que los estudiantes pudieran interpretar de manera geométrica los parámetros a y b, en la expresión simbólica $y = ax + b$ de una función lineal, así como escribir la expresión algebraica de la función lineal dada su representación gráfica.

Antes de iniciar con las actividades y el trabajo en pareja se preguntó a los estudiantes acerca de lo que conocían de la función lineal. Algunas de las respuestas más comunes fueron: “Son funciones que tienen como gráfica a una línea recta”, “Tienen pendiente”.

A manera de introducción el docente explicó a los estudiantes que las funciones lineales son aquellas cuya expresión simbólica tiene la forma, $y = ax + b$ donde a y b son números reales.

Posteriormente los estudiantes se formaron en parejas y docente les entregó las actividades a realizar en esta primera sesión (Anexo A) y les pidió que trabajaran la primera de las actividades, escribiendo todos sus procedimientos. De manera simultánea el docente preguntó a los estudiantes si estaban claras las actividades. Un estudiante de la pareja 2 preguntó: “¿Cuántos valores usamos para graficar? y ¿Qué valores usamos? El docente preguntó a los demás estudiantes: ¿alguien desea responder? Un estudiante de la pareja 5 respondió: “podemos asignar cualquier valor a la función y hay que hacer una tabla de valores para poder graficar y hay que usar los valores que sean necesarios para dibujar la recta”. Esto da una idea que algunos estudiantes tenían idea de cómo graficar y de que para hacerlo debían hacer una tabla de valores.

En la actividad 1 (Anexo A), todas las parejas pudieron dibujar las gráficas. Sin embargo, al momento de responder las preguntas de esta actividad (Figura 4.1) se observó que solo las parejas 3 y 4 identificaron similitudes en las gráficas (inciso a y b de la actividad 1). El resto de las parejas tuvieron dificultades para identificarlas. Por ejemplo, la pareja 3, escribió que las rectas tenían la misma pendiente, y que las gráficas “se movían” hacia arriba y abajo del eje Y (Figura 4.1).

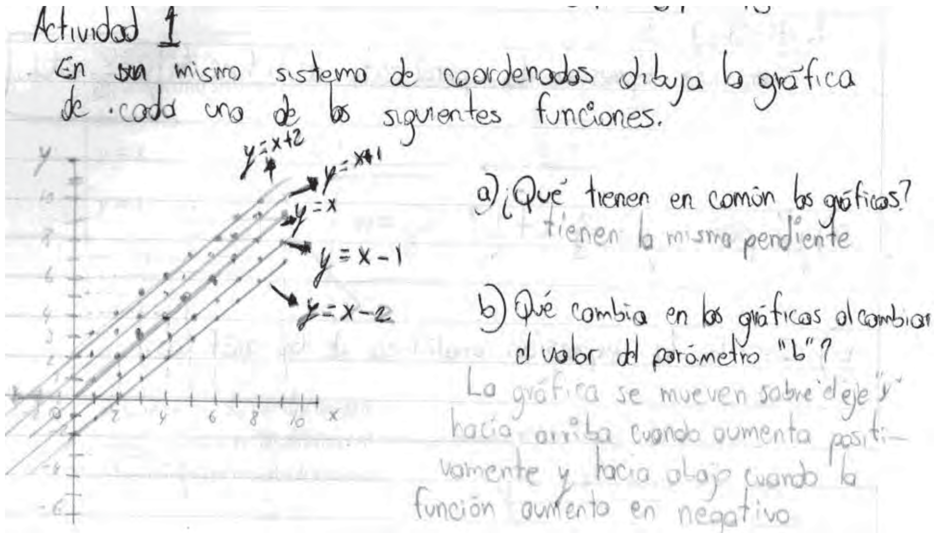


Figura 4.1. Actividad 1 de la pareja 3.

En la Figura 4.1 se observa cómo los estudiantes dibujaron todas las gráficas requeridas en la actividad y observaron que las gráficas “se movían” sobre el Y, sin embargo no relacionaron el valor del parámetro b de la función con el punto de intersección de la gráfica con el eje Y.

La pareja 4 (Figura 4.2) mencionó que las gráficas eran lineales y paralelas, además escribieron: “el parámetro b siempre se intersectará con el eje Y”. Esto muestra que observaron la relación entre el valor de este parámetro y el eje Y.

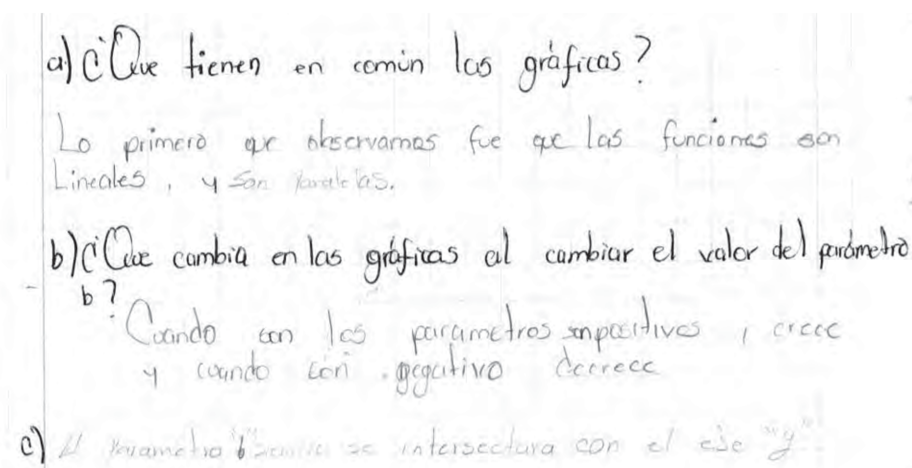
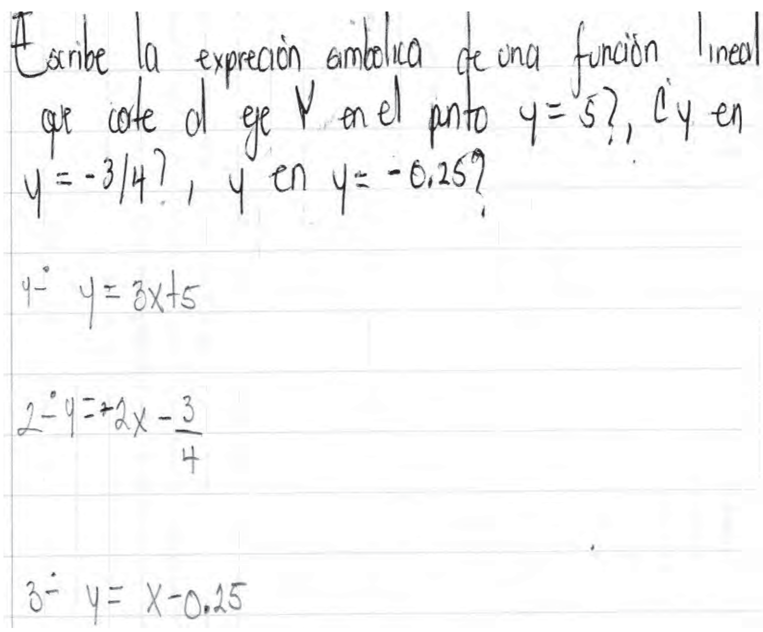


Figura 4.2. Actividad 1 de la pareja 4.

En el momento de la discusión grupal, los estudiantes expusieron sus conclusiones. La pareja 3 dibujó en la pizarra sus gráficas y comentó sus observaciones, un alumno de la pareja 2 mencionó: “Entonces si el valor del parámetro b va cambiando positivamente las gráficas van a ir hacia arriba de la otra y cuando es negativo se traslada debajo de la positiva”. Un alumno de la pareja 1 comentó: “Y cortan al eje en el valor que tiene la función si b es uno corta en uno y si es dos pues corta en dos, o sea es la intersección*”.*

A manera de conclusión y evaluación de la comprensión del significado del parámetro b en la representación gráfica y expresión algebraica, se les pidió a los estudiantes que escribieran tres expresiones simbólicas para funciones lineales que intersectaran al eje Y en ciertos puntos dados. Todas las parejas escribieron sus funciones sin problema alguno, inclusive las parejas que habían tenido dificultades para argumentar las respuestas a las preguntas a y b de la actividad 1 (Anexo A). En la Figura 4.3 se muestra un ejemplo.


Escribe la expreción simbolica de una función lineal que corte al eje Y en el punto $y = 5$?, ¿y en $y = -3/4$?, y en $y = -0.25$?

1.- $y = 3x+5$

2.- $y = +2x - \frac{3}{4}$

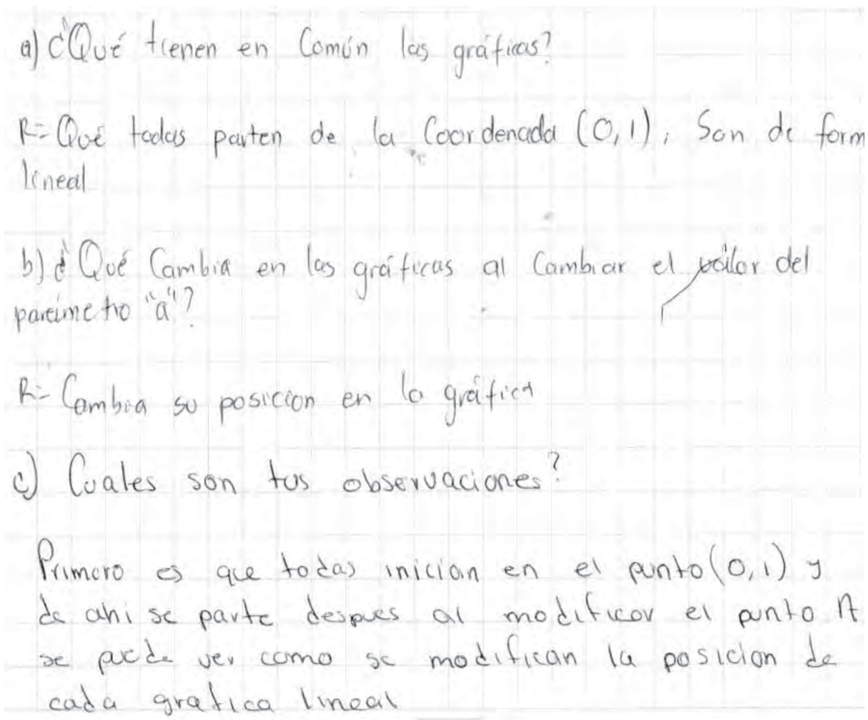
3.- $y = X - 0.25$

Figura 4.3. Funciones escritas por la pareja 2.

En la Figura 4.3 se observa que los estudiantes escribieron la representación algebraica de las funciones lineales requeridas en la actividad de evaluación correspondiente a la actividad 1.

Como cierre de la actividad 1, el docente, mencionó que este parámetro es conocido como ordenada al origen y que la gráfica de la función $y = ax + b$ intersecta al eje Y en el punto $(0, b)$.

En la segunda de las actividades (Anexo A), de nuevo las parejas trazaron las gráficas sin problema alguno, sin embargo, tuvieron dificultades en observar la variación en cuanto a la posición de las gráficas y el valor de la pendiente. Solo las parejas 2 y 4 respondieron las preguntas a y b (Figura 4.4).


a) ¿Qué tienen en Común las gráficas?

R= Qué todas parten de la Coordenada (0,1), Son de form lineal

b) ¿Qué Cambia en las gráficas al Cambiar el valor del parámetro "a"?

R= Cambia su posicion en la gráfica

c) Cuales son tus observaciones?

Primero es que todas inician en el punto (0,1) y de ahi se parte despues al modificar el punto A se puede ver como se modifican la posicion de cada grafica lineal

Figura 4.4. Actividad 2 de la pareja 2.

La Figura 4.4 muestra que la pareja 2 pudo observar que si cambiaba el valor del parámetro a cambiaba la posición de la gráfica, y lo mencionó. También observaron que todas las gráficas lineales pasan por un mismo punto aunque dijeron que las gráficas inician en ese punto.

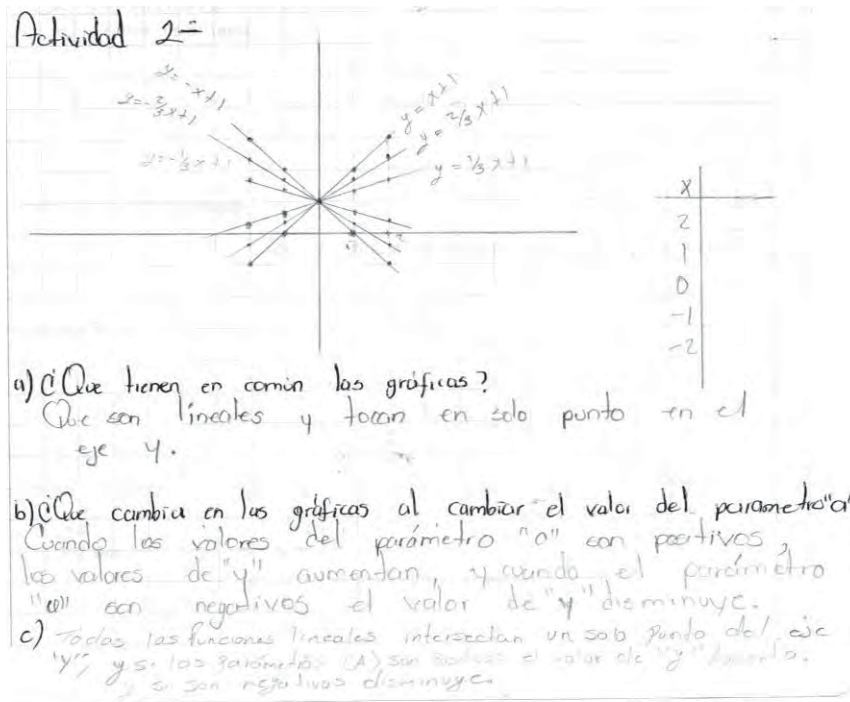


Figura 4.5. Actividad 2 de la pareja 4.

La pareja 4, además de hacer observaciones similares a las de la pareja 2, distinguió entre los valores positivos y negativos de la pendiente y la variación (Figura 4.5).

Con base en las respuestas dadas a las preguntas a, b y c de la actividad 2 se les pidió a todas las parejas que observaran las gráficas de las funciones que tenían valor de a positivo, por separado de las que tenían valor negativo. La discusión se dio de la siguiente manera.

Estudiante de la pareja 1: [*Usando sus manos señaló*] “las positivas están así y las negativas así”.

Profesor: ¿Podrías ser un poco más específico?

Estudiante de la pareja 1: es que no sé cómo decirlo.

Profesor: Si tuvieras que escribirlo, ¿Cómo lo harías?

Estudiante de la pareja 4: que las de valor positivo están hacia un lado y las negativas hacia otro.

Profesor: ¿hacia qué lados?

Estudiante de la pareja 4: pues *hacia la izquierda y la derecha.*

Profesor: ¿entonces?

Estudiante de la pareja 4: Las positivas están hacia la derecha y las negativas hacia la izquierda.

Profesor: ¿para todos está claro lo que menciona su compañero?

Estudiante de la pareja 3: pero...¿cómo que las positivas y negativas?

Estudiante de la pareja 4: bueno, las que tienen parámetro positivo están hacia la derecha y las de parámetro negativo hacia la izquierda.

Antes de continuar, el profesor reafirmó la discusión grupal de los alumnos en el sentido de que el parámetro a se llama pendiente y que está relacionado con la inclinación (ángulo con respecto al eje X) de la gráfica ya que los estudiantes tenían idea de esto pero no lograron concretizarlo.

Para complementar la discusión el profesor presentó a los estudiantes la siguiente gráfica, con el objetivo de que los estudiantes entendieran a la pendiente como una variación.

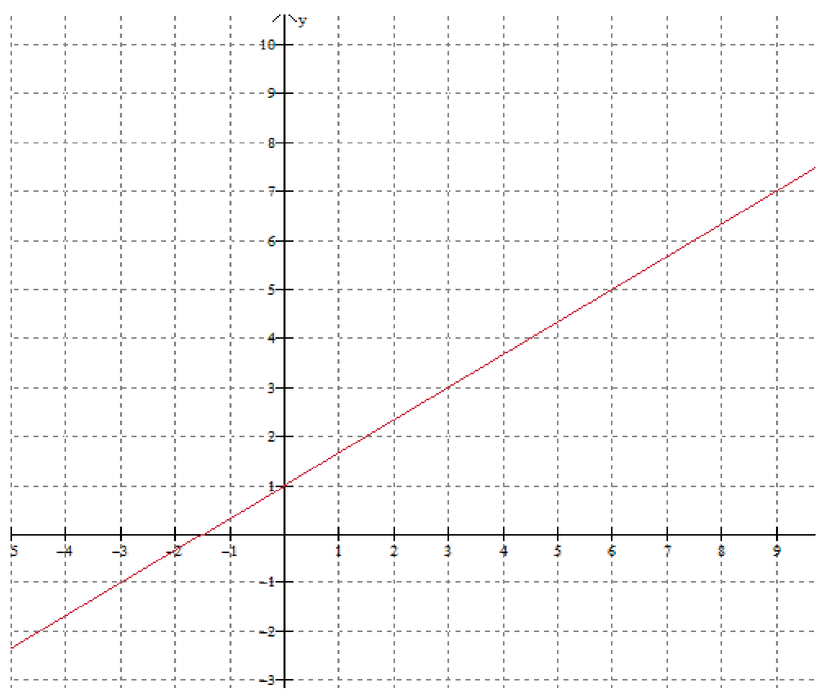


Figura 4.6. Gráfica de una función lineal.

El profesor pidió a los estudiantes que la describieran.

Pareja 1. Pasa por el punto (0, 1).

Pareja 3. Corta al eje en (0, 1) y está inclinada hacia la derecha.

Pareja 5. Tiene pendiente positiva.

El profesor les hizo la observación que a medida que los valores de la variable x aumentaban 3 unidades los valores de la variable y aumentaban 2 unidades, entonces, el valor de la pendiente debía ser $a = \frac{2}{3}$.

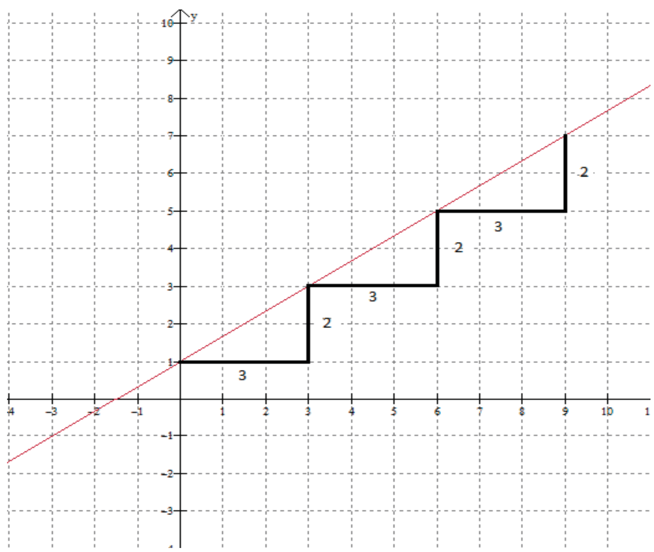


Figura 4.7. Pendiente de una función lineal.

El profesor preguntó, ¿Cuál sería la expresión analítica de esta función?

Alumno de la pareja 4: [*explicó al momento de pasar y escribir en la pizarra*]. Si la pendiente es $\frac{2}{3}$ y corta al eje Y en 1, entonces debe ser $y = \frac{2}{3}x + 1$. [*A continuación el profesor preguntó:*]

Profesor: ¿Qué pasaría si la pendiente fuera $-\frac{2}{3}$?

Estudiante de la pareja 3: ya no aumenta sino disminuye

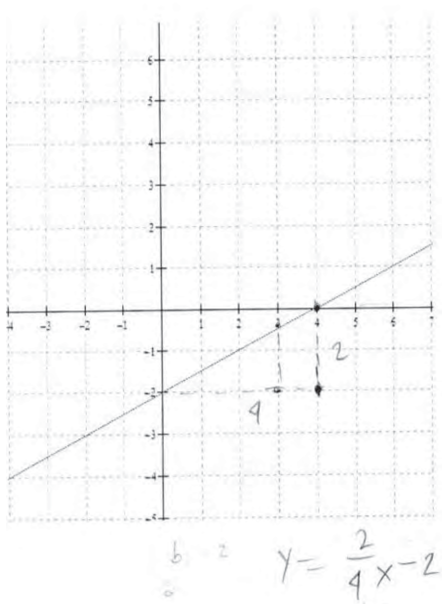
Estudiante de la pareja 1: si una aumenta la otra debe disminuir o sea si x aumenta entonces la y disminuye, va bajando.

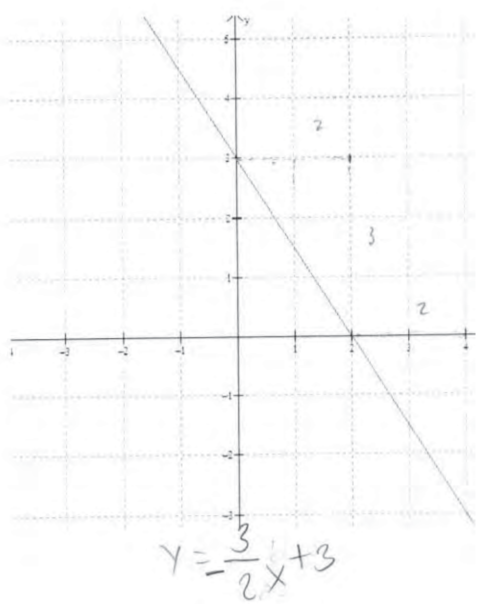
Profesor: ¿Están de acuerdo todos?

Todos: ¡si!

En este momento los estudiantes debían trabajar la última actividad (actividad 3, Anexo A), en la cual el objetivo era que integraran todo lo que se había discutido en el aula para determinar la expresión algebraica de una función lineal a partir de su representación gráfica.

De las cinco parejas, cuatro de ellas (parejas 1, 3, 4 y 5) pudieron escribir el valor de la pendiente y de la intersección de la gráfica con el eje Y, es decir, hallaron la pendiente y la ordenada al origen para cada función y escribieron la representación simbólica de la función dada. Sin embargo la pareja 2, cometió algunos errores (Figura 4.10). En las siguientes figuras 4.8 y 4.9 se muestran a manera de ejemplo las actividades de dos de las parejas (1 y 3, respectivamente). En la Figura 4.8 puede observarse cómo los estudiantes trazaron líneas punteadas para determinar la pendiente de cada recta.





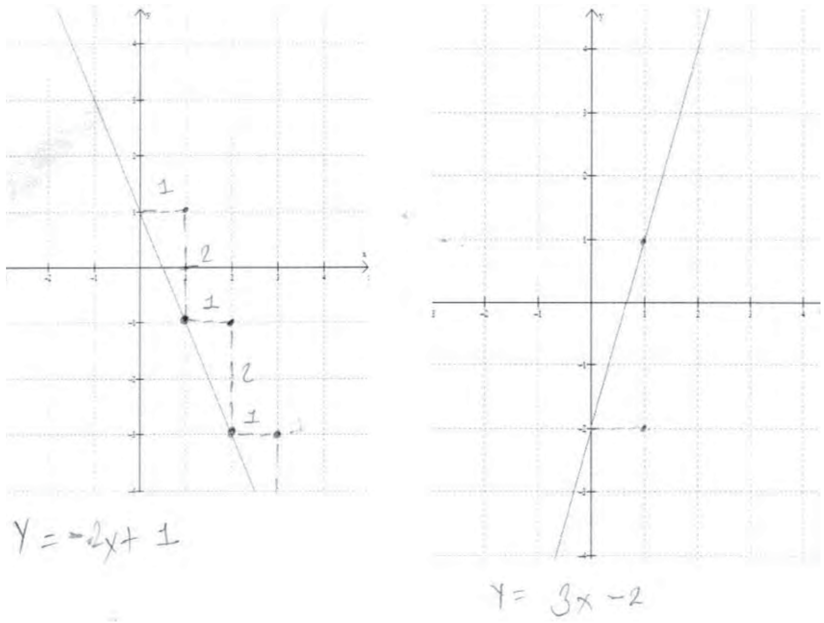


Figura 4.8. Actividad 3 de la pareja 1.

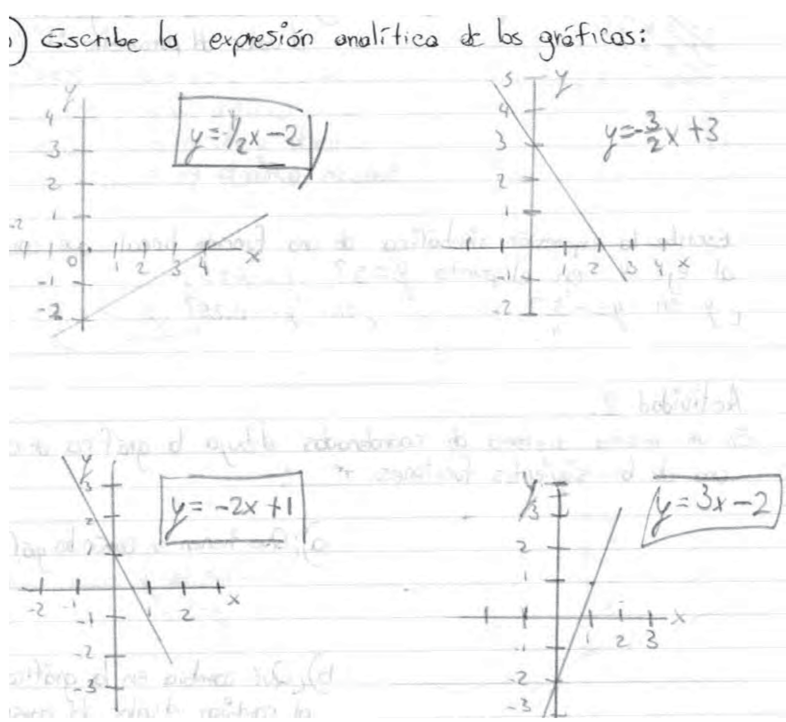


Figura 4.9. Actividad 3 de la pareja 3.

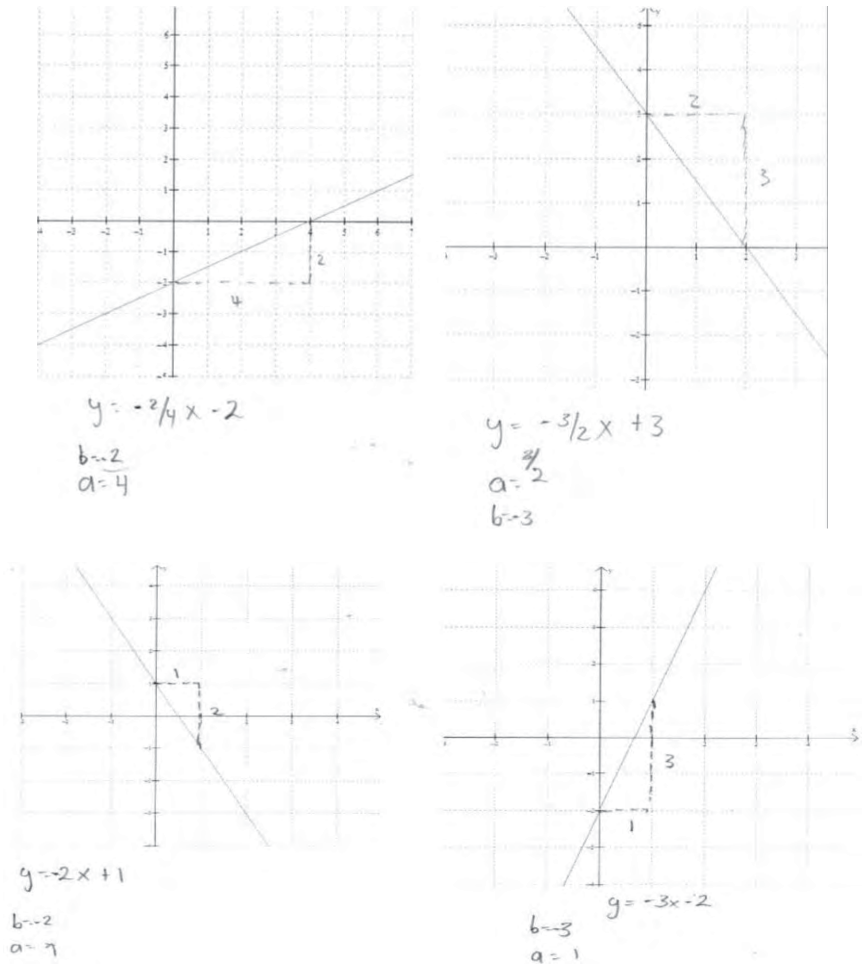


Figura 4.10. Actividad 3 de la pareja 2.

En la Figura 4.10 se observa cómo la pareja 2 identificó correctamente la expresión simbólica sólo en la segunda y tercera gráfica. En la primera y cuarta gráfica tiene errores de signo y cambian el significado del parámetro a. Estos errores nos conducen a pensar que los estudiantes (de la pareja 2) no comprendieron el significado de los parámetros, y la forma de obtener su valor, sino que sólo los utilizaron como etiquetas para escribir la ecuación. El concepto de variable por lo tanto, tampoco lo empezaron a desarrollar. Es decir no comprendieron que la pendiente se relaciona con la variación de la variable y con respecto a la variación de la variable x.

Al final de la sesión cuatro de las cinco parejas pudieron identificar, a partir de la representación gráfica, los parámetros a y b y escribir la expresión simbólica de cada una de las funciones dadas. En general esta primera sesión sirvió como acercamiento a la función lineal y a los parámetros asociados a su expresión simbólica dado que cuatro parejas de estudiantes pudieron interpretar de manera geométrica los parámetros a y b, en la expresión simbólica $y = ax + b$ de una función lineal, así como escribir la expresión simbólica de la función lineal dada su representación gráfica.

Tabla 4.1. Logros alcanzados por las parejas en la sesión 1

Parejas	Observaciones
1, 3, 4 y 5	Lograron hacer la conversión de la representación simbólica a la gráfica. Pudieron observar el efecto del signo de la pendiente en la orientación de la gráfica. En la representación gráfica identificaron la pendiente y la intersección. Escribieron la representación algebraica a partir de la gráfica.
2	A partir de la representación simbólica lograron hacer la conversión a la representación gráfica. No identificaron los parámetros de la función lineal a partir de su representación gráfica para escribir su representación algebraica (Figura 4.10).

4.2.2. Análisis de los resultados de la sesión 2

En esta segunda sesión se tenía como objetivo que los alumnos determinaran la expresión algebraica de una función lineal conociendo dos de los puntos por donde pasa su gráfica. Se trabajó con las mismas parejas de la sesión 1.

A manera de introducción el docente preguntó a los estudiantes si recordaban cómo calcular la pendiente de una recta conociendo dos de sus puntos, un estudiante del equipo 1 respondió: “con la fórmula de la pendiente”

Entonces el docente comentó que en esta sesión se trabajaría con ejercicios de los cuales debían hallar de nuevo la expresión simbólica de una función lineal cuando se conocen dos de los puntos de la gráfica. A continuación se le entregó a las parejas las actividades a trabajar.

Al inicio dos de las parejas (2 y 3) preguntaron al docente acerca de la actividad 1 (Anexo A): “¿Cómo usamos los puntos en la fórmula o sea quién es (x_1, y_1)? ¿Puede ser cualquiera de los puntos?”. El docente hizo la pregunta de reflexión: ¿piensan que el valor de la pendiente depende de a quién llamen (x_1, y_1) y (x_2, y_2)? Un alumno de la pareja 2 contestó: “yo creo que si va a cambiar”. Entonces el docente contestó: “calculen la pendiente cambiando la elección de los puntos y saquen sus conclusiones”. En este ambiente de aprendizaje los estudiantes pueden explorar diferentes posibilidades para responder su propia pregunta. Este proceso permite que profundicen su conocimiento y hacerlo significativo. Después de hacer sus cálculos y obtener el mismo resultado el mismo estudiante de la pareja 2 mencionó: “no importa da lo mismo, no cambia la pendiente”.

En la Figura 4.11 se muestra la actividad de la pareja 1 como un ejemplo representativo de todos los procedimientos de las parejas.

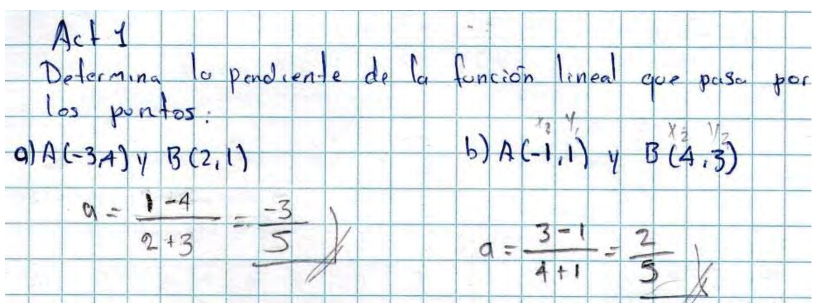


Figura 4.11. Actividad 1 de la pareja 1.

En la Figura 4.11 se puede observar que los estudiantes denotaron las coordenadas de los puntos A y B como (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y las sustituyeron en la fórmula para obtener el valor de la pendiente.

En la actividad dos (Anexo A), los alumnos debían hallar la expresión analítica para las funciones lineales cuando se conocen dos de sus puntos. Al iniciar el proceso de solución, un alumno de la pareja 4 mencionó: “entonces hay que calcular la pendiente y la intersección”.

Las parejas 1 y 5 encontraron los valores de la pendiente y de la ordenada al origen, también escribieron la expresión algebraica de ambas funciones (Figura 4.12).

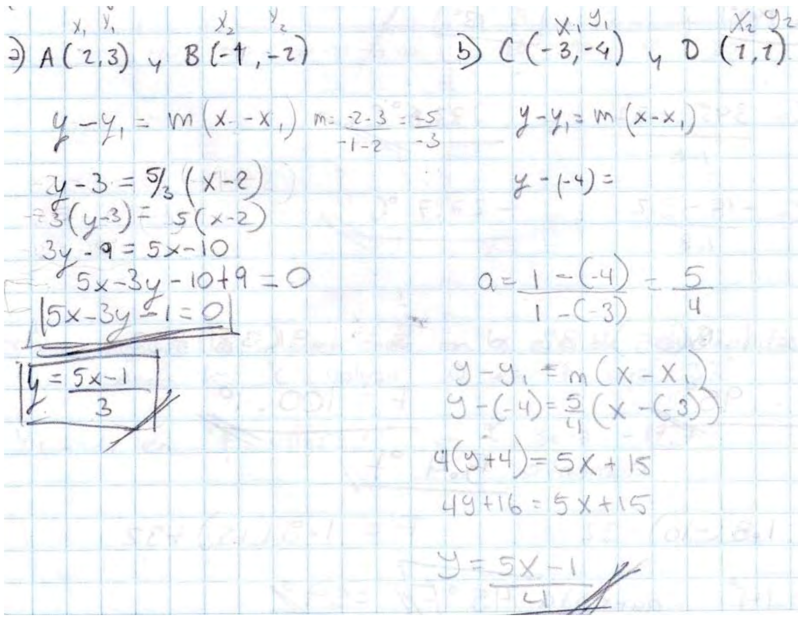


Figura 4.12. Actividad 2 de la pareja 5.

La Figura 4.12 ilustra el procedimiento que emprendió la pareja 5. En el inciso a denotó las coordenadas $(2,3)$ y $(\square 4, \square 2)$ como (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, para calcular la pendiente. Procedió de manera similar en el inciso b. Se observa que esta pareja de estudiantes tiene conocimiento de la forma punto pendiente de la ecuación de una recta y la utilizaron.

En el caso de las parejas 2 y 4, su trabajo (figuras 4.13 y 4.14) muestra que sabían que debían hallar una función de la forma $y = ax + b$. Calcularon sin problema alguno el valor de la pendiente. Para el caso de la intersección (parámetro b) los estudiantes de estas parejas tuvieron dudas.

> Un estudiante de la pareja 4 preguntó: para calcular b ¿cuál de los puntos uso? ¿Puedo usar cualquiera de los dos?
>
> Docente: entonces ¿crees que el valor de b va a depender del punto que utilices?

Estudiante de la pareja 4: creo que sí.

Docente: Pues haz el ejercicio, calcula este parámetro usando los dos puntos y después saca tus propias conclusiones.

El diálogo anterior

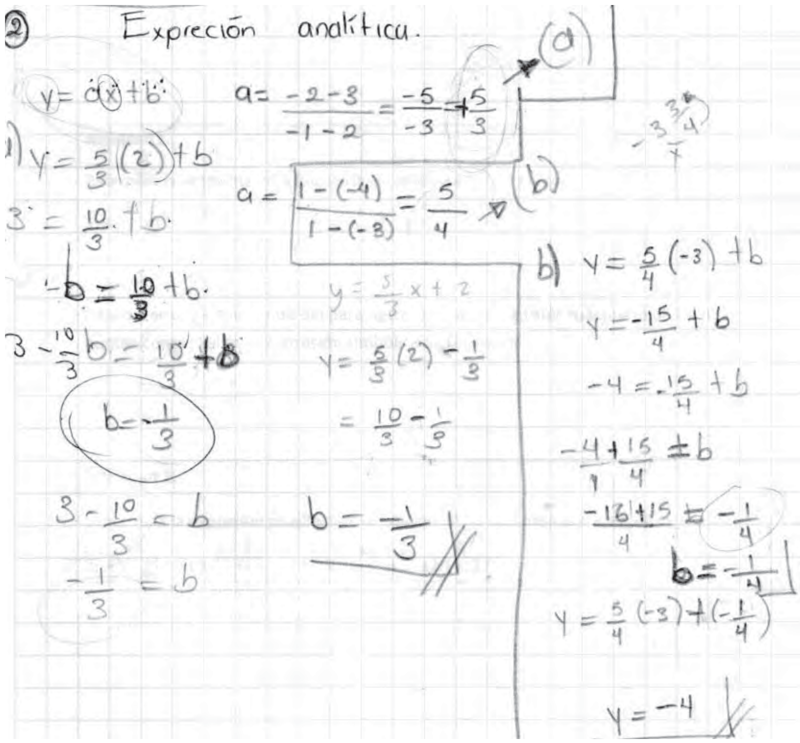


Figura 4.13. Actividad 2 de la pareja 2.

Se observa en la Figura 4.13 que los estudiantes de la pareja 2, calcularon la pendiente para ambas funciones. Para determinar el parámetro b utilizaron el punto (2, 3). Estos estudiantes sustituyeron este punto en la expresión simbólica de la función lineal y despejaron el parámetro b. Sin embargo, no escribieron las expresiones algebraicas de las funciones lineales aun cuando en su procedimiento inician escribiendo la forma de la función lineal que debían obtener.

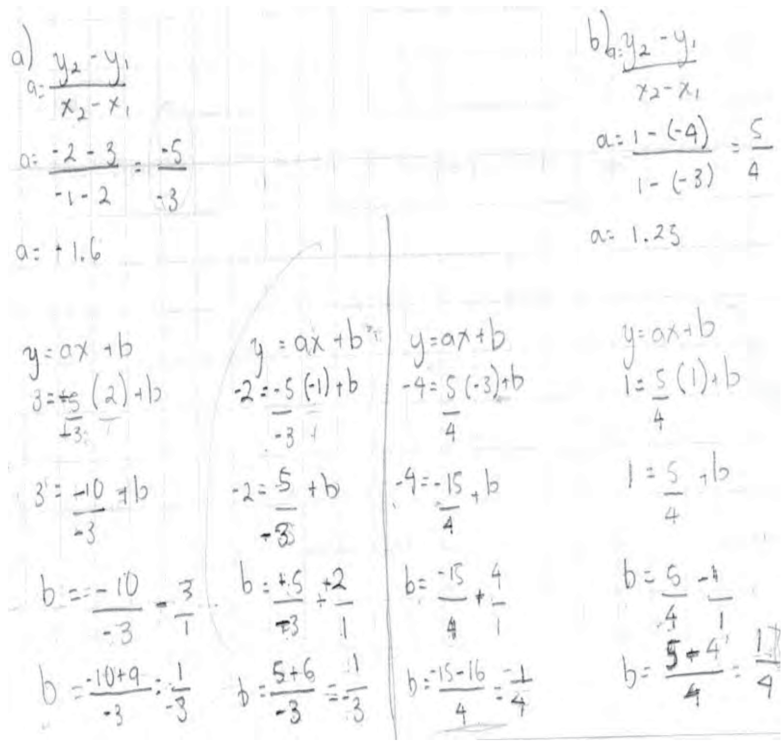


Figura 4.14. Actividad 2 de la pareja 4.

En la Figura 4.14 los estudiantes de la pareja 4 calcularon la pendiente para cada función lineal. Para determinar el valor del parámetro b utilizaron los dos puntos dados. Se observa que cometieron errores en sus despejes. En el caso del inciso b obtuvieron resultados diferentes. Esta pareja no manejó de manera correcta el tratamiento en el registro algebraico.

En cuanto a la pareja 3 se pudo observar que tuvieron dificultades en el cálculo de los parámetros a y b (Figura 4.15).

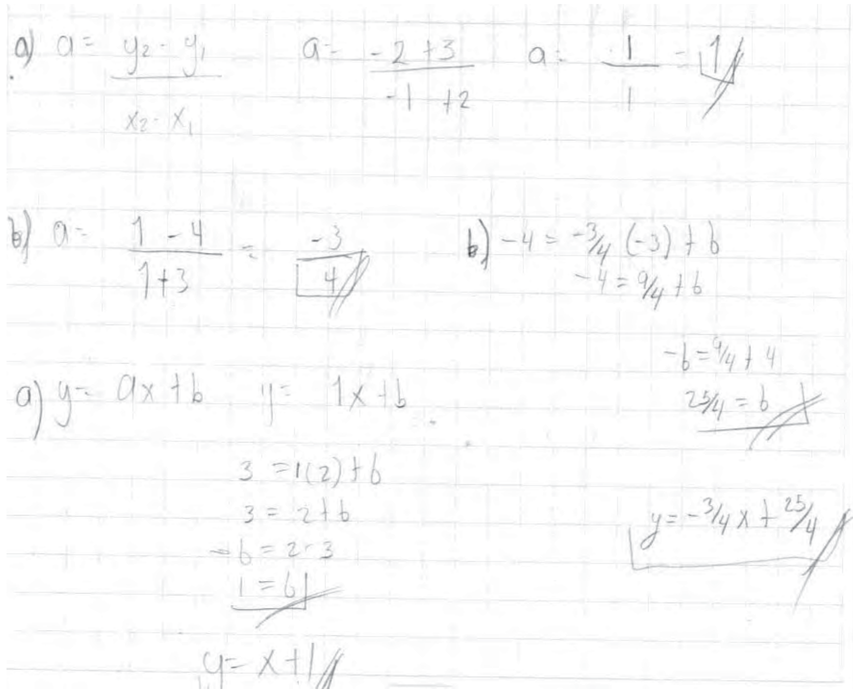


Figura 4.15. Actividad 2 de la pareja 3.

En la Figura 4.15 se observa que estos estudiantes cometieron algunos errores en el cálculo de ambas pendientes, aun cuando en la actividad 1 (Anexo A) lo habían hecho sin problema alguno. Estos errores en la pendiente los llevó a obtener un valor del parámetro b erróneo. No manejaron adecuadamente el tratamiento del registro simbólico.

Después de finalizado el trabajo en parejas, se procedió a la comparación de sus resultados. Todas las parejas, a excepción de la 3, coincidieron con los cálculos de la pendiente y de la intersección. Los estudiantes de la pareja 5 explicaron el procedimiento que utilizaron para determinar las expresiones simbólicas de las funciones lineales pedidas. Los estudiantes de las parejas 2 y 4 dijeron que olvidaron escribir la expresión simbólica de las funciones, mientras que los de la pareja 3 dijeron que el error al momento del cálculo de la pendiente provocó que las expresiones halladas fueran erróneas pero que sí sabían cómo calcularlas.

La tercera actividad (Anexo A) de esta sesión tenía como objetivo que los estudiantes usaran los conocimientos anteriores para determinar la función lineal asociada a una situación dada.

Las parejas 1 y 5 no tuvieron problema para determinar la función y contestar todas las preguntas. La Figura 4.16 es un ejemplo representativo de los procedimientos de todas las parejas, en ella se muestra el trabajo de la pareja 5.

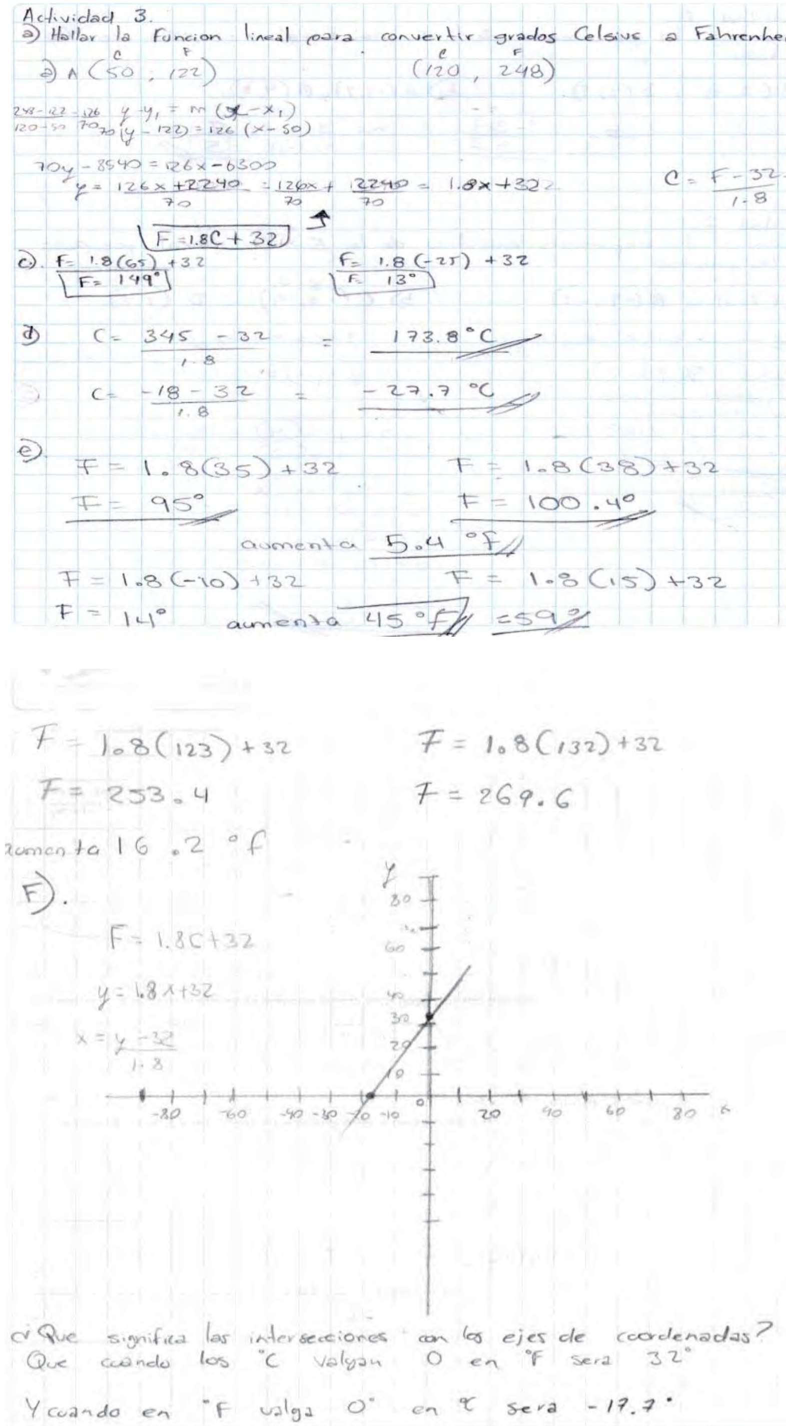


Figura 4.16. Actividad 3 de la pareja 5.

En la Figura 4.16 se observa que los estudiantes de la pareja 5 identificaron los valores dados y los usaron para calcular la pendiente. Estos estudiantes usaron las variables C y F para identificar a los puntos. Lograron escribir la representación simbólica de la función pedida e hicieron el tratamiento dentro de este registro de representación para responder las preguntas. En la representación gráfica los estudiantes interpretaron las intersecciones de la gráfica en términos del problema. Las parejas 2 y 4 determinaron la pendiente, la intersección y la expresión simbólica de la función lineal. Trabajaron de manera correcta en el registro simbólico para responder a las preguntas. Sin embargo, en el registro gráfico no interpretaron el significado de las intersecciones de la gráfica con los ejes coordenados.

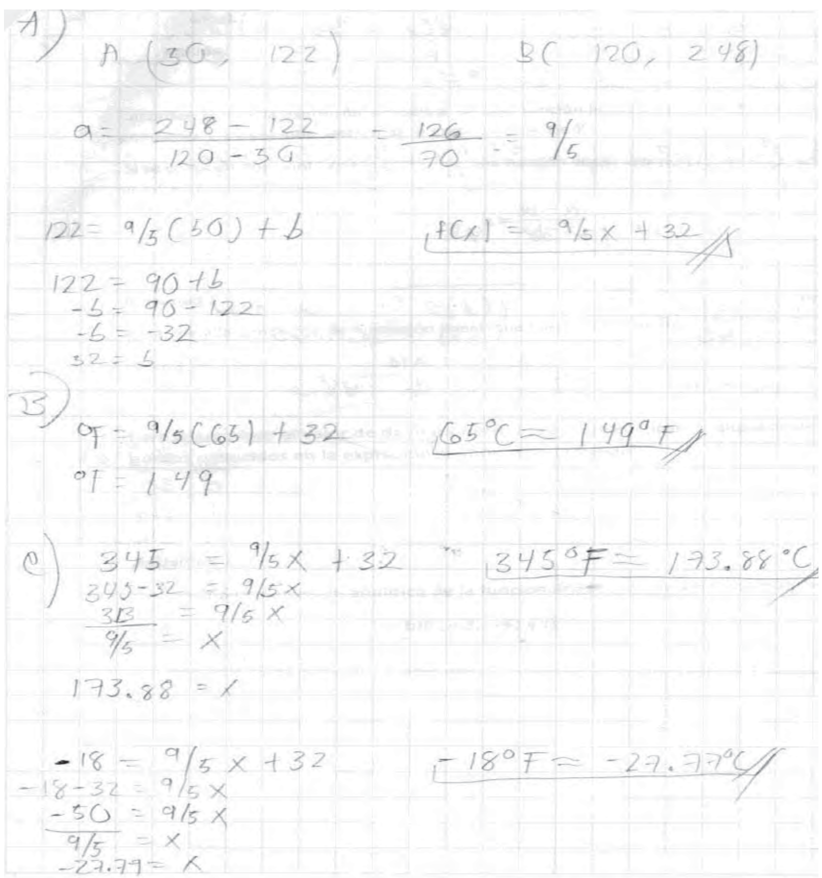


Figura 4.17. Actividad 3 de la pareja 3.

En la Figura 4.17 se observa que los estudiantes de la pareja 3 utilizaron los valores dados como parejas ordenadas y calcularon la pendiente y la ordenada al origen. Todas sus respuestas son correctas, sin embargo, no describieron el significado de las intersecciones de la gráfica con los ejes de coordenadas. Esta pareja que cometió errores en la actividad anterior pudo calcular la expresión simbólica de manera correcta.

Después de finalizado el trabajo en parejas, se procedió a la comparación de sus resultados. Los estudiantes de la pareja 3 pasaron a la pizarra y explicaron su procedimiento. Todas las parejas coincidieron con los cálculos de la pendiente (parámetro a) y de la intersección (parámetro b). Mencionaron que ahora no habían cometido errores como en la actividad anterior. En cuanto a la representación gráfica, mencionaron que no supieron como calcular las intersecciones. Después la pareja 5 pasó a la pizarra para explicar las intersecciones. Uno de los estudiantes de esta pareja mencionó: "primero igualamos a cero la función para obtener el valor de C". Con ayuda de su cuaderno escribió en la pizarra el despeje y comentó: "nos da $C = -17.7$, esto significa que cero grados Fahrenheit son equivalente a -17.7 grados Celsius, y es el punto en donde intersecta al eje X". Después escribió de nuevo en la pizarra al momento que mencionó: "ahora si los Celsius son cero nos queda que $F = 32$, que es el valor b que ya habíamos calculado y es la intersección con el eje Y. Esto significa que cero grados Celsius equivalen a 32 grados Fahrenheit".

Para el cierre de la actividad, el profesor preguntó lo siguiente:

Profesor: En la situación anterior ¿Qué cantidades están involucradas?

Parejas 2 y 4: Grados Celsius y Fahrenheit

Profesor: Además existe una dependencia entre ellas

Alumno de la pareja 5: los Fahrenheit dependen de los Celsius

Profesor: Decimos entonces que los grados Celsius son la variable independiente y los grados Fahrenheit son la variable dependiente.

> Los valores de la variable independientes forman el conjunto llamado dominio y los valores de la variable independiente forman el rango.

En términos generales los estudiantes pudieron determinar la función lineal de conversión entre las escalas Celsius y Fahrenheit. Los estudiantes observaron que al tratarse de una función lineal debían calcular la pendiente e intersección y lo hicieron. Pudieron manejarse bien en el registro algebraico. Identificaron qué y cómo sustituir en cada una de las fórmulas. La conversión del registro algebraico al gráfico les permitió a las parejas 1 y 5 dar significado a la función lineal construida. Los parámetros a y b de la función lineal, de nuevo fueron identificados al dibujar la recta y sus intersecciones con los ejes de coordenadas.

Tabla 4.2. Logros alcanzados por los estudiantes en la sesión 2

Parejas	Observaciones
1 y 5	Calcularon la pendiente y la intersección a partir de los valores dados. Escribieron la expresión simbólica e hicieron el tratamiento de este registro de representación para contestar las preguntas. Realizaron el registro gráfico e interpretaron las intersecciones en término del problema.
2, 3 y 4	Calcularon la pendiente y la intersección a partir de los valores dados. Escribieron la expresión simbólica e hicieron el tratamiento de este registro de representación para contestar las preguntas. No interpretaron las intersecciones en el registro gráfico.

4.2.3. Análisis de los resultados de la sesión 3

Esta sesión se trabajó en un tiempo de una hora. Se trabajó con las mismas cinco parejas de las sesiones anteriores. La actividad (Anexo A) tuvo como objetivo que los estudiantes trabajaran los registros de representación verbal, simbólica y gráfica de una función lineal asociada a una situación dada. De nuevo los estudiantes tenían que calcular la pendiente e interpretarla en términos de la situación. Tenían que hacer uso de la representación simbólica para responder las preguntas dadas. Al inicio de esta sesión el docente entregó a los estudiantes la actividad que trabajarían. Para la primera de las preguntas un estudiante de la pareja 1 mencionó: “creo que si se puede, con las cantidades que se dan se puede determinar una función lineal”.

Del análisis de las evidencias se observó que todas las parejas procedieron a obtener la función en su forma algebraica sin ninguna dificultad. En las figuras 4.18 y 4.19 se muestra el trabajo de la pareja 1 como uno de los procedimientos representativos del trabajo de los estudiantes.

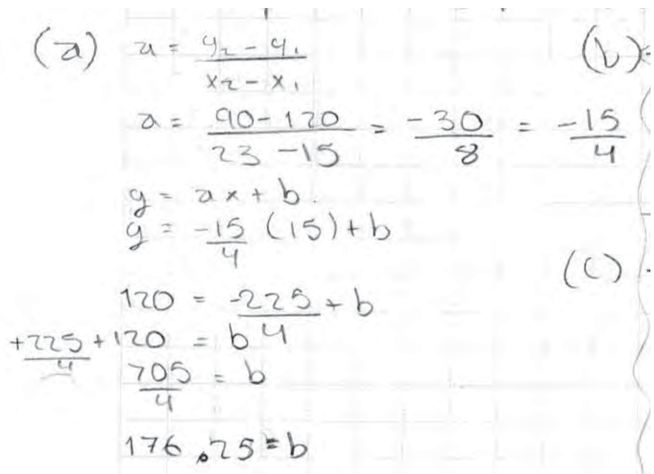


Figura 4.18. Actividad de la pareja 1.

En la Figura 4.18 se observa cómo la pareja 1 determinó el valor de la pendiente ($a = -15/4$) y la ordenada al origen (176.25) y en la Figura 4.19 se muestra cómo utilizó estos valores para escribir la función lineal.

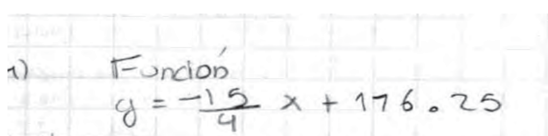


Figura 4.19. Función lineal determina por la pareja 1.

Para la segunda pregunta (Anexo A), un estudiante de la pareja dos mencionó: “como nos dan cuántas bolsas debe vender, pues hay que despejar x” .Todas las parejas coincidieron en esta respuesta. Este estudiante pasó a la pizarra y explicó su procedimiento, a partir del que tenía en su cuaderno (Figura 4.20). De nuevo el resultado de todas las parejas coincidió.

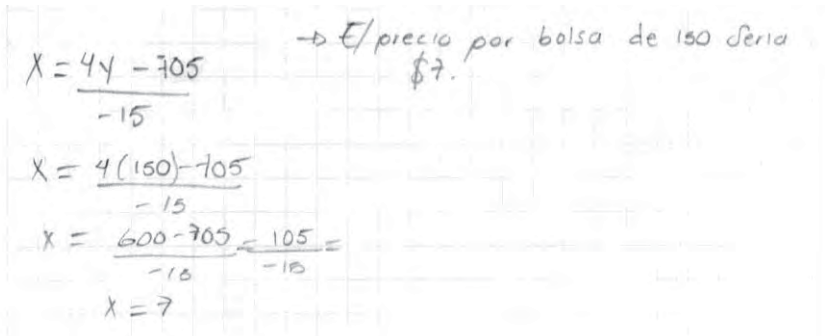


Figura 4. 20. Despeje de la pareja 5.

En la Figura 4.20 se observa cómo la pareja 5 utilizó la representación algebraica previamente obtenida de la función y despejó la variable x para determinar el precio al cual se debe vender cada bolsa de palomitas para poder vender 150 bolsas. La tercera pregunta era similar a la segunda, un estudiante de la pareja 3 mencionó: “en el mismo despeje solo debemos sustituir el número de bolsas que es 60 y obtenemos el precio que sería de 31 pesos”. Las demás parejas mencionaron que obtuvieron el mismo resultado. Para la cuarta pregunta los estudiantes de la pareja 1 mencionaron: “solo hay que sustituir en la función el precio de $27 para que nos de 75 bolsas vendidas”. Todas las demás parejas mencionaron que tenían el mismo resultado. De manera similar para la quinta pregunta, el mismo estudiante de la pareja 1 mencionó: “ahora sustituimos el precio de $17 y obtenemos 112.5 bolsas vendidas”.

En la pregunta seis, un estudiante de la pareja 3 mencionó: “como el número de bolsas depende del precio entonces significa que mientras más caro sea el precio se venderán menos bolsas por eso nos da negativo”. El profesor preguntó: “¿qué más pueden decir acerca de la pendiente?”. La pareja 1 mencionó: “la pendiente indica la variación, es decir, como nos dio $-{}^{15}\!/_{4}$ entonces por cada 4 pesos que se aumente el precio se venderán 15 bolsas menos y así sucesivamente. Si aumenta otros 4 pesos se venden 4 menos”. Un alumno de la pareja 5 mencionó: “nosotros la dejamos como $-{}^{30}\!/_{8}$ pero es lo mismo si aumenta 8 el precio se venden 30 menos. Es la misma proporción”. Esto nos indica que los estudiantes empezaron a darle significado al valor de la pendiente en el contexto de la situación planteada.

Los estudiantes al tratar de matematizar esta situación presentada empiezan a elucidar el concepto de variación relacionándolo con la idea de y con la idea de proporción.

En cuanto a las intersecciones los estudiantes de las parejas 1, 3 y 5 trazaron la gráfica de la función lineal y la describieron.

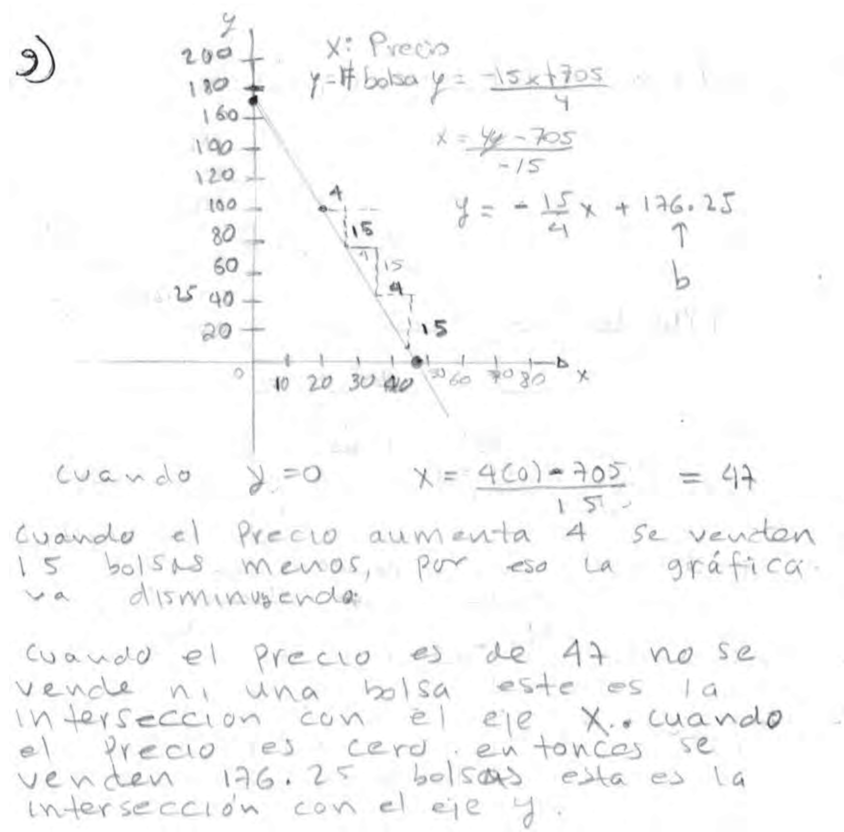


Figura 4.21. Descripción de la gráfica hecha por la pareja 3.

En la Figura 4.21 los estudiantes de la pareja 3, utilizaron el registro algebraico para determinar la intersección de la gráfica con el eje X y mencionaron que este punto es el precio para el cual no habrá venta. De manera similar en la representación simbólica ubicaron el valor del parámetro b para determinar el punto de intersección de la gráfica con el eje Y y mencionaron que es el número de bolsas que se venderían a un precio de cero pesos. También se observó que trazaron líneas punteadas en la gráfica para ubicar a la pendiente y mencionaron que cuando el precio aumenta 4 pesos entonces el número de bolsas vendidas disminuye en 15 y esto lo relacionaron con el hecho de que la gráfica va decreciendo. Usaron el registro de representación gráfico para interpretar la situación planteada.

Los estudiantes pudieron transferir los conocimientos adquiridos en las sesiones anteriores para resolver este problema. Aunque los estudiantes de las parejas 1, 3 y 5 no hicieron tablas de datos, a partir del registro simbólico identificaron cómo varía *y* en función de *x* y para ello utilizaron expresiones similares a las utilizadas por el docente en la sesión 1 para referirse a la pendiente de una línea recta (Figura 4.7). La tasa de cambio fue apreciada por las parejas 1 y 5. Inclusive la pareja 5 introdujo una explicación en términos de proporcionalidad. La conversión entre los diferentes registros de representación se dio de manera natural ya que los estudiantes observaron que cada registro le proporcionaba información para dar solución a la situación planteada.

Tabla 4.3. Logros alcanzados por las parejas en la sesión 3

Parejas	Observaciones
1, 3 y 5	Los estudiantes determinaron la expresión simbólica de la función lineal y lograron interpretar la pendiente en términos del contexto del problema. Hicieron el tratamiento en el registro simbólico para responder las preguntas. Usaron el registro gráfico para describir la situación.
2 y 4	Los estudiantes determinaron la expresión simbólica de la función lineal. No lograron interpretar el significado de la pendiente en términos del problema. Realizaron el tratamiento en el registro simbólico para responder las preguntas. Lograron hacer la gráfica pero no interpretaron las intersecciones con los ejes.

4.2.4. Análisis de los resultados de la sesión 4

Esta cuarta sesión se trabajó en un tiempo de dos horas con 8 estudiantes formados en cuatro parejas (denominadas 1, 2, 3 y 4). El objetivo de la actividad 1

(Anexo A) fue que los estudiantes ajustaran un modelo lineal a partir de un conjunto de datos. Cabe mencionar que solo tres de las parejas anteriores coincidieron con las formadas anteriormente, debido a la inasistencia de dos de los estudiantes. Para iniciar la sesión el profesor proporcionó a las parejas las actividades que debían trabajar. La dinámica de esta sesión fue, trabajo en parejas para discutir y redactar sus procedimientos y posteriormente discusión grupal de las respuestas de cada pareja.

Para responder la pregunta 1 (Anexo A), las cuatro parejas dibujaron los puntos en el sistema de coordenadas. En la pregunta 2 (Anexo A), las parejas 2, 3 y 4 mencionaron que los puntos se asemejaban a una línea (Figura 4.22) y que se podía ajustar una recta.

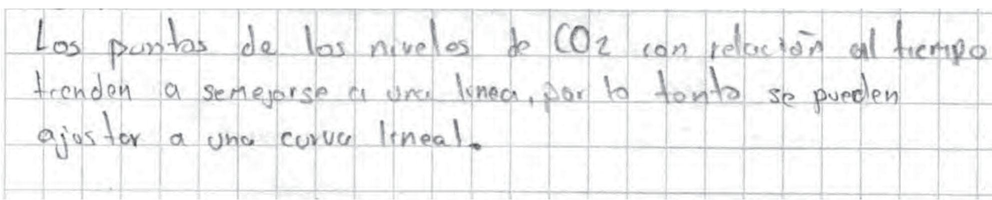

Los puntos de los niveles de CO_2 con relación al tiempo tienden a semejarse a una linea, por lo tanto se pueden ajustar a una curva lineal.

Figura 4.22. Respuesta de la pregunta dos de la pareja 3.

> Un estudiante de la pareja 1 mencionó: el nivel va aumentando conforme pasan los años, pero lo puntos quedan dispersos, no definen una curva.
>
> Docente: “¿Por qué no?
>
> Estudiante de la pareja 1: porque una curva sería así [*el estudiante mueve su mano de abajo hacia arriba para describir lo que él considera sería una curva y añade*] pero puede ser una recta no una curva.

El profesor comentó que una recta puede ser una curva que se ajuste al conjunto de datos.

Para responder la pregunta 3 (Anexo A), debían de escoger dos de los puntos de la gráfica y trazar la recta que mejor se ajustara a todos los puntos. Todas las parejas escogieron dos de los puntos y trazaron la recta que pasaba por ellos. Las parejas 1 y 3 escogieron el segundo y último punto, la pareja 2 escogió el primer y último punto mientras que la pareja 4 escogió el segundo y sexto punto (Figura 4.23).

En la pregunta 4, los estudiantes de las pareja 1 y 4 trazaron rectas verticales que intersectaban al eje horizontal en cada punto correspondiente al año en que debían hacer la estimación, estas rectas intersectaban a la gráfica trazada por ellos y posteriormente dibujaron rectas horizontales iniciando en cada punto de intersección con la gráfica hasta que intersectaran al eje vertical (Figura 4.22) con esto determinaban la estimación para el nivel de CO_2.

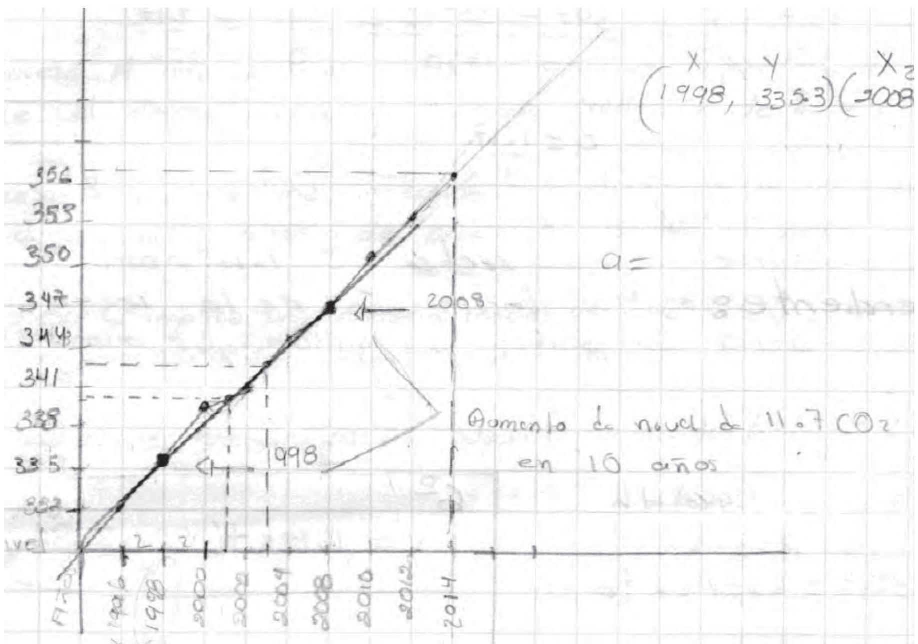


Figura 4.23. Estimación del nivel de CO_2 hecha por la pareja 4.

La pareja 4 realizó las estimaciones haciendo uso de la representación gráfica (Figura 4.23). Las estimaciones hechas por esta pareja fueron: para el año 1998 aproximadamente 335.3 ppm; para 2001 aproximadamente 339; para 2003 aproximadamente 343 y para 2014 aproximadamente 365.5. La pareja 1 obtuvo las estimaciones siguientes: para el año 1998 aproximadamente 334; para 2001 aproximadamente 340; para 2003 aproximadamente 342 y para 2014 aproximadamente 370. Las parejas 2 y 3 no respondieron.

En cuanto a las respuestas a la pregunta 5 (Anexo A) todas las parejas calcularon la pendiente usando los dos puntos que escogieron. Las parejas 1 y 3 obtuvieron

18.7/14. La pareja 2 obtuvo 1.375, mientas que la pareja 4 obtuvo 1.17 (Figura 4.24).

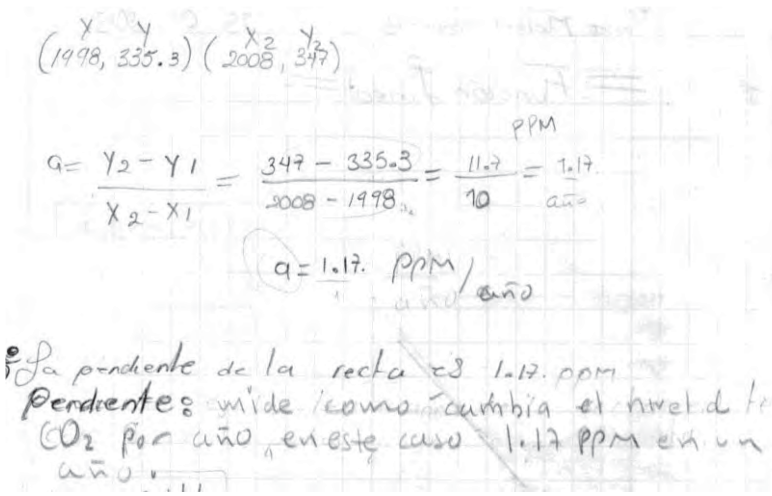
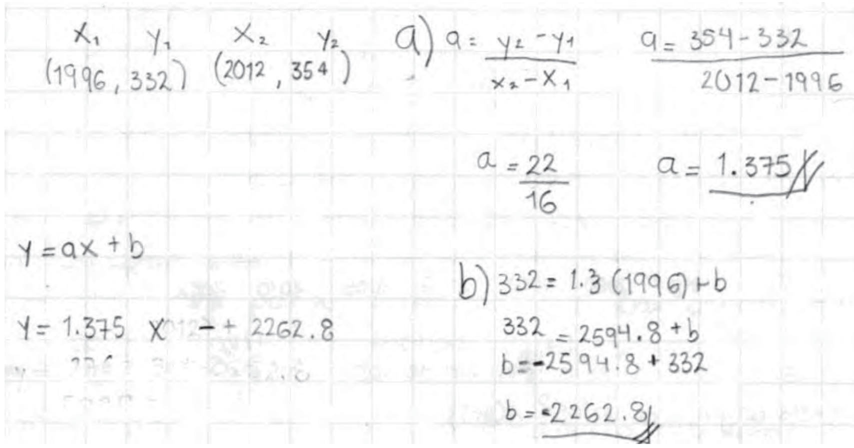


Figura 4.24. Cálculo e interpretación de la pendiente de la pareja 4.

En cuanto al significado de la pendiente la pareja 3 escribió: “el aumento del nivel de CO_2 por año”, mientras que la pareja 1 escribió: “que por cada año que pase el nivel aumenta 1.375 ppm”. En la Figura 4.22 se observa que los estudiantes de la pareja 4 interpretaron la pendiente: “la pendiente mide cuanto cambia el nivel de CO_2 por año en este caso 1.17 ppm en un año”. La pareja 2 no respondió. En este caso las respuestas muestran que los estudiantes (parejas 1, 3 y 4) pudieron darle significado al valor de la pendiente en términos del contexto del problema. Al igual que en la actividad anterior el contexto significativo permitió que los estudiantes matematizaran la situación y elucidaran conexiones entre conceptos fundamentales como variación, razón de cambio y pendiente.

Para responder la pregunta número 6 (Anexo A), todas las parejas determinaron la ecuación de la recta que dibujaron usando los puntos que escogieron.



$x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2$

$(1996, 332) \quad (2012, 354)$

a) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad a = \frac{354 - 332}{2012 - 1996}$

$a = \frac{22}{16}$ $\quad a = 1.375$

$y = ax + b$

b) $332 = 1.3(1996) + b$

$332 = 2594.8 + b$

$b = -2594.8 + 332$

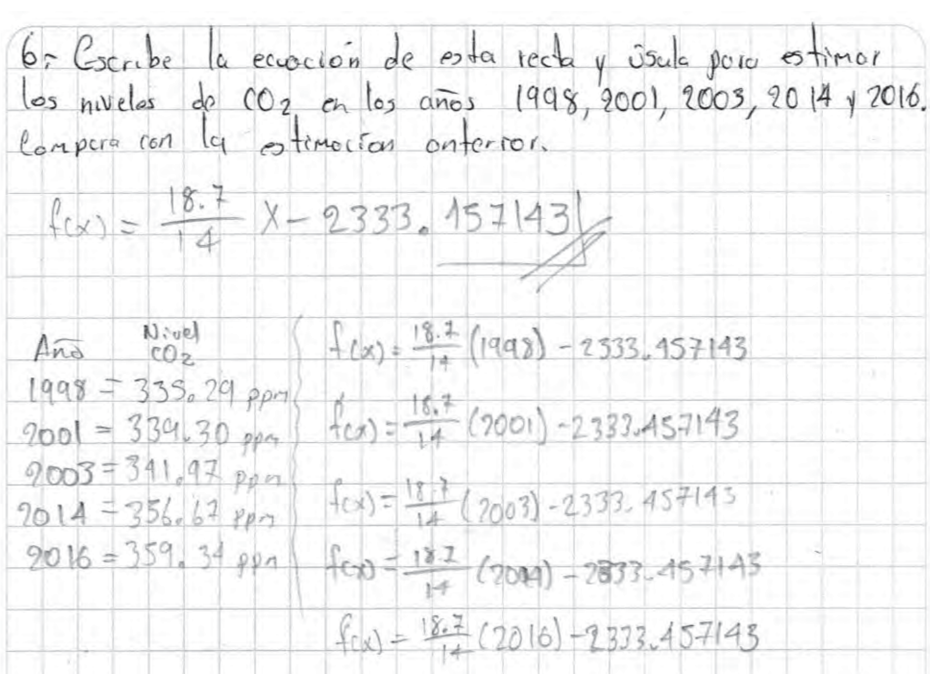
$b = -2262.8$

$Y = 1.375\ X - + 2262.8$

Figura 4.25. Expresión simbólica calculada por la pareja 2.

En la Figura 4.25 se muestra que los estudiantes de la pareja 2 utilizaron los puntos que escogieron para calcular la pendiente y la intersección de la función lineal y escribieron su representación lineal. Esto muestra la evolución del conocimiento de esta pareja para obtener la representación simbólica ya que en la sesión dos (Figura 4.13) no lograron hacerlo.

Con esta ecuación determinaron las estimaciones para los años 1998, 2001, 2003, 2014 y 2016.



6.- Escribe la ecuación de esta recta y úsala para estimar los niveles de CO_2 en los años 1998, 2001, 2003, 2014 y 2016. Compara con la estimación anterior.

$f(x) = \frac{18.7}{14} X - 2333.157143$

Año	Nivel CO_2
1998	335.29 ppm
2001	339.30 ppm
2003	341.97 ppm
2014	356.67 ppm
2016	359.34 ppm

$f(x) = \frac{18.7}{14}(1998) - 2333.457143$

$f(x) = \frac{18.7}{14}(2001) - 2333.457143$

$f(x) = \frac{18.7}{14}(2003) - 2333.457143$

$f(x) = \frac{18.7}{14}(2014) - 2333.457143$

$f(x) = \frac{18.7}{14}(2016) - 2333.457143$

Figura 4.26. Estimaciones usando la representación simbólica de la pareja 3.

En la Figura 4.26 se observa que los estudiantes de la pareja 3 utilizaron la representación simbólica para hacer las estimaciones en los años que se pedían.

En las respuestas a la pregunta 6 (Anexo A), las parejas 1 y 3, mencionaron que debían despejar la variable x de la ecuación anterior. La Figura 4.27 muestra el procedimiento de la pareja 3 como ejemplo representativo del trabajo de las parejas.

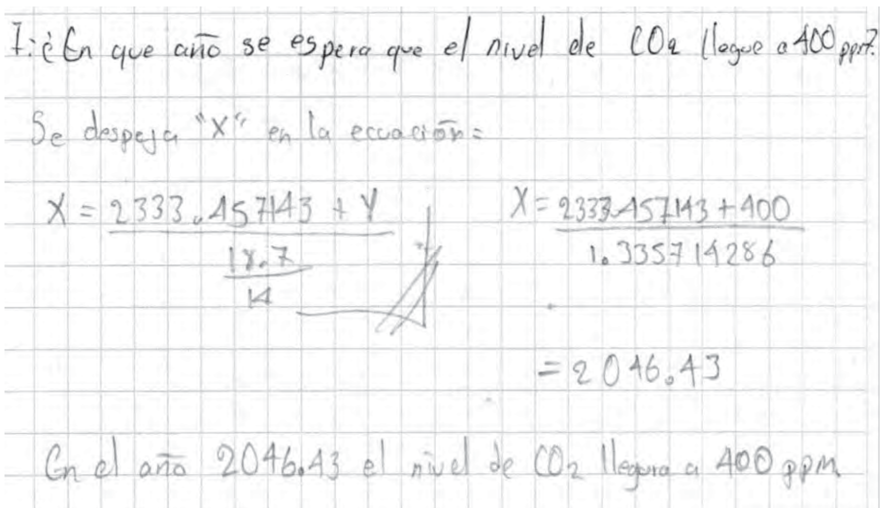


Figura 4.27. Despeje realizado por la pareja 3.

Se observa en la Figura 4.27 que la pareja 3 realizó el tratamiento en el registro simbólico para determinar el año en que el nivel de CO_2 llegaría a 400 ppm. Obtuvo que sería en el año 2046.43. La pareja 4 calculó que esto sería en el año 2054, pero no describió cómo determinaron este valor. La pareja 2 no respondió.

Después del trabajo en parejas se procedió a la discusión grupal. El docente pidió a cada pareja que mencionaran sus respuestas para cada una de las preguntas. La pareja 3 mencionó: “los puntos se ajustan a una línea recta, con esta recta se pueden hacer las aproximaciones”. La misma pareja 3 pasó a la pizarra y explicó la forma que se pueden hacer las aproximaciones usando la representación gráfica de la recta trazada por los dos puntos que escogieron. Un estudiante de la pareja 4 mencionó: “nosotros hicimos lo mismo y obtuvimos valores muy parecidos”.

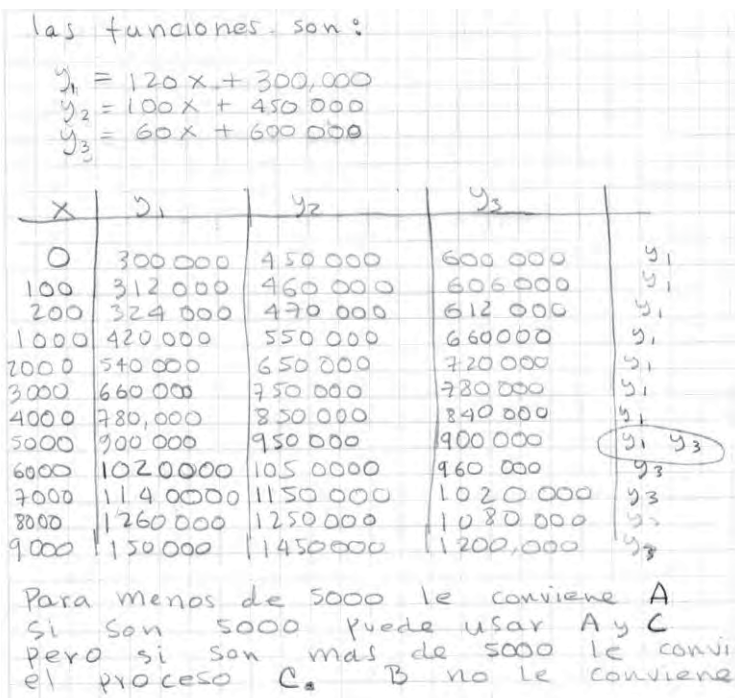
Para el caso de la pendiente un estudiante de la pareja 4 mencionó (Figura 4.24): “en este caso la pendiente nos da la variación del nivel de CO_2 en cada año, a nosotros nos dio 1.17, esto quiere decir que cada año este nivel aumenta 1.17 ppm”. Un estudiante de la pareja 2 mencionó: “a nosotros nos dio 1.375 pero no supimos cómo interpretarla”. En cuanto a la ecuación de la recta todas las parejas pudieron determinarla y estimar los niveles de CO_2 usando esta ecuación.

Al final de esta actividad, y de acuerdo con las evidencias mostradas por las parejas, se observó la evolución de los estudiantes al trabajar un problema de la vida cotidiana aplicando los conocimientos adquiridos. Lo más importante fue que pudieron darle sentido al valor de la pendiente que encontraron. Para cerrar esta actividad el profesor explicó que los modelos lineales son los más sencillos ya que sólo se necesita calcular dos parámetros (pendiente e intersección) para poder describirlos y que se pueden utilizar para hacer estimaciones. También que estos modelos son de gran utilidad en muchas ramas de la ciencia.

En la segunda de las actividades (Anexo A) los estudiantes trabajaron nuevamente en parejas. El objetivo fue que pudieran responder una situación a partir del registro de representación que ellos trabajaran. Para iniciar el docente preguntó a los estudiantes si tenían alguna duda con la actividad, un estudiante de la pareja 2 mencionó: “creo que le conviene más el proceso A porque invierte menos, pero no creo que sea así de fácil”. En ese momento un estudiante de la pareja 3 agregó: “pero no estas tomando en cuenta que cada artículo tiene un costo que hay que agregarlo a la inversión inicial”. El mismo estudiante de la pareja 4 mencionó: “Entonces el costo total va a depender de cuantos artículos produzca”.

En todo momento del trabajo en parejas el docente estuvo observando a los estudiantes y respondiendo a sus preguntas. Cabe mencionar que el docente no les daba las respuestas sino que les hacía preguntas de reflexión para que los estudiantes pudieran responder por sí mismos sus preguntas. Por ejemplo, un estudiante de la pareja 1 preguntó: “¿no sabemos cómo empezar?”. El docente les preguntó: ¿En qué se basarían ustedes para decidir el mejor proceso? El mismo estudiante respondió después de pensar un poco: “el que cueste menos”. El docente mencionó: “bien, ¿Entonces?”, el otro estudiante de esta pareja respondió: “hay que calcular los costos de cada proceso y ver cuál sale más barato, hay que hacer una tabla”.

De las evidencias se pudo observar que todas las parejas pensaron en encontrar la función en su forma algebraica que proporcionara el costo en términos del número de artículos producidos. Los estudiantes de la pareja 1, escribieron las funciones lineales para cada uno de los tres procesos. A continuación tabularon para hallar los costos dependiendo del número de artículos fabricados (Figura 4.28).


las funciones son:

$y_1 = 120x + 300,000$
$y_2 = 100x + 450\,000$
$y_3 = 60x + 600\,000$

x	y_1	y_2	y_3	
0	300 000	450 000	600 000	y_1
100	312 000	460 000	606 000	y_1
200	324 000	470 000	612 000	y_1
1000	420 000	550 000	660000	y_1
2000	540 000	650 000	720 000	y_1
3000	660 000	750 000	780 000	y_1
4000	780,000	850 000	840 000	y_1
5000	900 000	950 000	900 000	y_1 y_3
6000	1020000	105 0000	960 000	y_3
7000	114 0000	1150 000	1020 000	y_3
8000	1260 000	1250 000	1080 000	y_3
9000	150 000	1450000	1200,000	y_3

Para menos de 5000 le conviene A
si son 5000 puede usar A y C
pero si son mas de 5000 le convi
el proceso C. B no le conviene

Figura 4.28. Representaciones simbólica y tabular de la pareja 1.

La Figura 4.26 muestra que estos estudiantes observaron que para 5000 artículos los costos generados por los procesos A y C eran iguales y que para más de 5000 artículos el proceso C era el que convenía. Esta pareja utilizó los registros de representación, simbólico y tabular, para hallar la solución al problema. Los estudiantes de la pareja 3 escribieron la representación simbólica que representaba a cada proceso y dibujaron en un mismo sistema de coordenadas la gráfica de cada función (Figura 4.29).

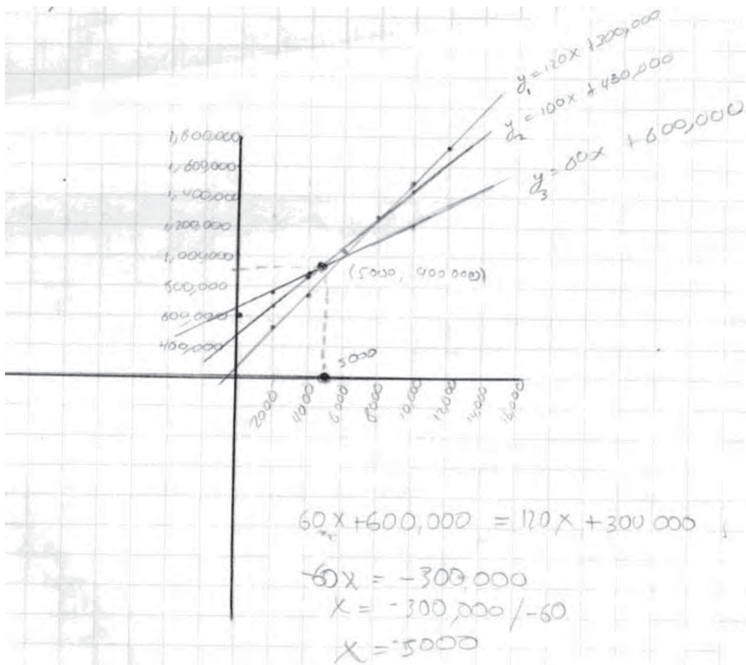


Figura 4.29. Graficas de la pareja 3.

Esta pareja, al dibujar las gráficas (Figura 4.28), observó que existía un punto de intersección de las gráficas de las funciones y_1 y y_2. Calcularon este valor igualando las expresiones simbólicas de estas dos funciones y concluyeron en términos de este valor.

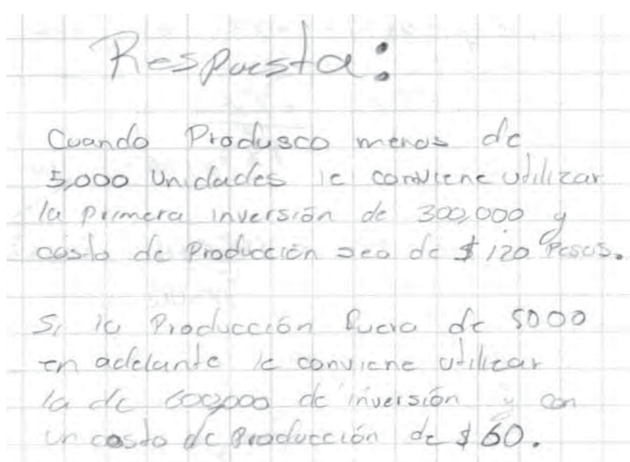


Figura 4.30. Respuesta de la pareja 3 a la actividad 2.

Esta pareja manejó tres registros de representación, simbólico, tabular y gráfico, para hallar la solución del problema.

La pareja 4, realizó la representación tabular para determinar cada proceso. Dibujó la graficas en el mismo sistema de coordenadas y concluyó de manera similar a las parejas 1 y 3.

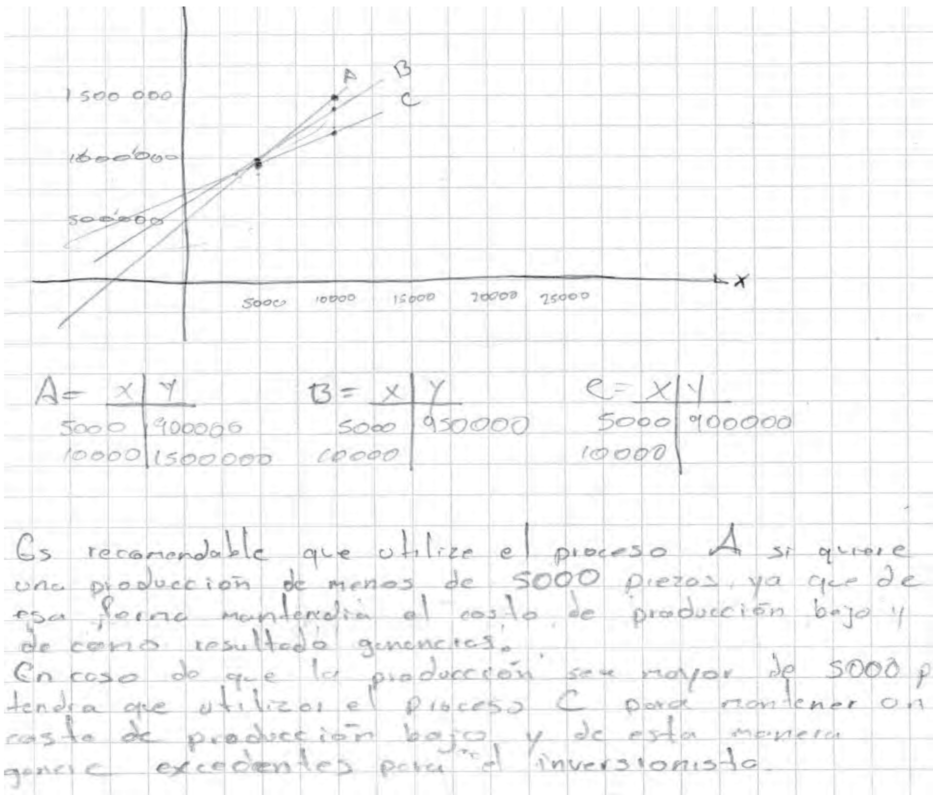
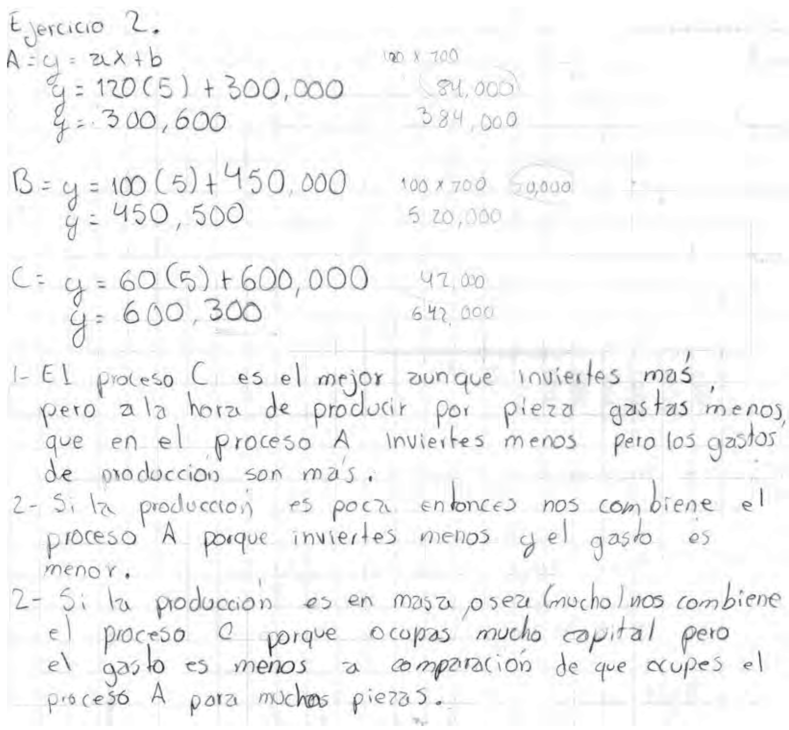


Figura 4.31. Registros de representación usados por la pareja 4.

En la Figura 4.31 se observa los registros de representación que utilizó esta pareja. Aunque no explicitaron la manera en que obtuvieron su respuesta, concluyeron de manera similar a las parejas 1 y 3.

En cuanto a la pareja 2 determinaron las expresiones simbólicas para cada proceso y las usaron para determinar algunos valores (Figura 4.32).



Ejercicio 2.
A = y = ax + b
y = 120(5) + 300,000
y = 300,600

100 x 700
84,000
384,000

B = y = 100(5) + 450,000
y = 450,500

100 x 700 70,000
520,000

C: y = 60(5) + 600,000
y = 600,300

42,000
642,000

1- El proceso C es el mejor aunque inviertes más, pero a la hora de producir por pieza gastas menos, que en el proceso A inviertes menos pero los gastos de produccion son más.
2- Si la produccion es poca entonces nos combiene el proceso A porque inviertes menos y el gasto es menor.
2- Si la produccion es en masa, osea (mucho) nos combiene el proceso C porque ocupas mucho capital pero el gasto es menos a comparación de que ocupes el proceso A para muchas piezas.

Figura 4.32. Respuesta de la actividad 2 de la pareja 2.

En la Figura 4.32 se observa que la pareja 2 tenía claro que cada proceso se podía modelar por medio de una función lineal. Usaron las expresiones simbólicas para calcular algunos valores. No lograron concluir en términos del número de artículos producidos.

Después de que los estudiantes trabajaron en parejas, se procedió a la discusión grupal. La pareja 1 pasó al frente para explicar su procedimiento. Uno de los estudiantes de esta pareja escribió en la pizarra las expresiones simbólicas de las funciones lineales que representaba a cada proceso y mencionó: “nosotros escribimos las funciones para cada opción y después hicimos una tabla”. El docente preguntó: ¿Por qué decidieron hacer una tabla? El mismo estudiante respondió: “porque queríamos saber cómo variaban los costos y eso se ve en la tabla”. Luego dibujó la tabla que obtuvieron y mencionó: “Vimos que para 5000 artículos la opción A y C son iguales y para más de 5000 la opción C es más barata”. El docente preguntó: ¿qué pasa con el proceso B?. El alumno respondió: “En la tabla se observa que siempre sale más caro, así que no conviene”.

La pareja 3, pasó a la pizarra para mostrar su procedimiento. Uno de los alumnos mencionó: “nosotros también escribimos las funciones y las graficamos”. El otro alumno escribió las representaciones de las tres funciones y trazó las gráficas en un mismo sistema de coordenadas. Posteriormente mencionó: “cuando graficamos vimos que hay intersección en las del proceso A y C. Calculamos el valor de la intersección que fue para 5000 artículos” Figura 4.27. El docente preguntó: ¿y cuál es su conclusión?”. Uno delos estudiantes respondió: “Depende de los artículos que produzca, si son menos de 5000 le conviene el A para más de 5000 le conviene el C”. Después el docente preguntó: ¿y qué pasa si desea producir exactamente 5000 artículos? Un alumno de la pareja 1 respondió: “se tiene el mismo costo así que puede usar cualquiera de los procesos A o C”.

Se puede observar que los estudiantes usaron al menos dos registros de representación para poder resolver la situación.

Tabla 4.4. Logros alcanzados por las parejas en la sesión 4

Parejas	Observaciones
1	A partir de la información dada realizaron la conversión al registro simbólico que representaba a cada proceso. Realizaron la conversión al registro tabular y con base a los valores obtenidos en este último registro concluyó. Manejaron 3 registros de representación.
2	Usaron la información dada para obtener la representación simbólica para cada proceso, aun cuando no las escribieron. No lograron concluir en términos del número de artículos producidos. Sólo dos registros.
3	A partir de la información dada realizaron la conversión al registro de representación simbólico. Hicieron la conversión al registro tabular y gráfico. Con el tratamiento en el registro simbólico determinaron la intersección y concluyeron en términos de este valor. Utilizaron 4

	registros de representación.
4	A partir de la información dada realizan la conversión al registro tabular y luego al gráfico. Con la ayuda del registro tabular determinaron la intersección y concluyeron usando este valor. Manejaron tres registros.

4.3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Para determinar los logros de los estudiantes después de trabajar las actividades de la secuencia, se aplicó el instrumento de evaluación (Anexo B). Los estudiantes trabajaron de manera individual. Para llevar a cabo el registro de los resultados de cada uno de los estudiantes. Se les nombró Estudiante 1 y Estudiante 2 a los alumnos de la pareja 1, Estudiante 3 y Estudiante 4 a los de la pareja 2, Estudiante 5 y Estudiante 6 a los de la pareja 3 y así sucesivamente.

El instrumento de evaluación (Anexo B) estuvo compuesto de tres actividades similares a las que los estudiantes trabajaron en la secuencia. En la siguiente sección 4.3.1, se resumen los resultados obtenidos de acuerdo a los registros de representación manejados por cada estudiante. La nomenclatura usada en las tablas se refieren a los tipos de representaciones que los estudiantes utilizaron de manera correcta, A: algebraico; T: tabular; G: gráfico: V: verbal.

4.3.1. Resultados de la actividad 1

En la primera actividad (Anexo B), los estudiantes debían identificar la pendiente (parámetro a) y la intersección (parámetro b) de la función lineal a partir de su representación gráfica; escribir su expresión simbólica y realizar el tratamiento en este registro para responder las preguntas.

Tabla 4.5. Alcance de los estudiantes en la actividad 1

Pareja	Estu diante	Alcances
1	1 AG	Identificó la intersección. Utilizó dos puntos de la gráfica para calcular pendiente. Realizó la conversión del registro gráfico al registro simbólico e hizo el tratamiento en este registro para contestar las preguntas.
	2 G	Identificó la intersección y la pendiente en la representación gráfica. Realizó la conversión del registro gráfico al registro simbólico. No realizó el tratamiento en el registro simbólico.
2	3	Identificó el parámetro b (intersección) en la representación gráfica. No identificó la pendiente. No escribió la representación simbólica de la función.
	4 G	Identificó la intersección y la pendiente en la representación gráfica. Realizó la conversión del registro gráfico al registro simbólico. No realizó el tratamiento en este registro para contestar las preguntas.
3	5 AG	Identificó la intersección. Utilizó dos puntos de la gráfica para calcular pendiente. Escribió la expresión simbólica y realizó el tratamiento en este registro para contestar las preguntas.
	6 AG	Identificó la intersección. Determinó la pendiente usando la representación gráfica. Realizó la conversión del registro gráfico al registro simbólico e hizo el tratamiento en este registro para contestar las preguntas.
4	7	Identificó la intersección. Determinó la pendiente usando la representación gráfica. Realizó la conversión del registro gráfico

	AG	al registro simbólico y realizó el tratamiento en este registro para contestar las preguntas.
	8	Identificó la intersección como el parámetro. No identificó la pendiente. No escribió la representación simbólica de la función.
5	9 AG	Identificó la intersección. Determinó la pendiente usando la representación gráfica. Realizó la conversión del registro gráfico al registro simbólico e hizo el tratamiento en este registro para contestar las preguntas.
	10 G	Identificó la intersección. Determinó la pendiente usando la representación gráfica. Realizó la conversión del registro gráfico al registro simbólico. No realizó el tratamiento en este registro para contestar las preguntas.

La Tabla 4.5 permite observar el desempeño individual y por pareja de los estudiantes. Algunos estudiantes tuvieron muy buen desempeño individual en cuanto a la comprensión de los conceptos involucrados en la actividad; es decir en cuanto a la identificación de la pendiente (parámetro a), la intersección (parámetro b), y la escritura algebraica de la función lineal. Esto se puede describir en términos de la conversión y tratamiento de registros.

Algunos estudiantes se desempeñaron muy bien en los registros algebraico y gráfico (AG), mientras que otros tuvieron mejor desempeño sólo en el registro gráfico (G). Sin embargo, hubo estudiantes a quienes se les dificultó tanto la conversión como el tratamiento en los registros algebraico y gráfico.

Podríamos concluir que un 20% de estudiantes (3 y 8) tuvieron un bajo desempeño. El 30% (2, 4 y 10) sólo se desempeñó bien en el registro gráfico. El 50% (1, 5, 6, 7 y 9) mostraron buen desempeño en la conversión y tratamiento de registros.

4.3.2. Resultados de la actividad 2

La segunda actividad (Anexo B) tenía como objetivo que los estudiantes analizaran una situación que se puede modelar por medio de una función lineal. Los estudiantes tenían que calcular e interpretar en el contexto del problema la pendiente e intersección. Debían escribir la representación simbólica de la función lineal. Hacer el tratamiento en la representación simbólica y la gráfica para responder las preguntas.

Tabla 4.6. Alcance de los estudiantes en la actividad 2

Pareja	Estudiante	Alcance
1	1 VATG	A partir de la información dada (representación verbal) determinó la expresión simbólica. Realizó la conversión a la representación tabular y gráfica. Interpretó la pendiente e intersección en el contexto del problema. Describió la representación gráfica.
	2 VATG	A partir de la información dada (representación verbal) determinó la expresión simbólica. Realizó la conversión a la representación tabular y gráfica. Interpretó la pendiente e intersección en el contexto del problema. Describió la representación gráfica.
2	3	Calculó la pendiente pero no la interpretó. No realizó la conversión a la representación simbólica.
	4 VAT	A partir de la información dada (representación verbal) determinó la expresión simbólica. Realizó la conversión a la representación tabular y gráfica. Interpretó la pendiente e intersección en el contexto del problema. Hizo el tratamiento en el registro simbólico para responder las preguntas. No describió

		la representación gráfica.
3	5 VATG	A partir de la información dada (representación verbal) determinó la expresión simbólica. Realizó la conversión a la representación tabular y gráfica. Interpretó la pendiente e intersección en el contexto del problema. Hizo el tratamiento en el registro simbólico para contestar las preguntas. Describió la representación gráfica.
	6 VATG	A partir de la información dada (representación verbal) determinó la expresión simbólica. Realizó la conversión a la representación gráfica. Interpretó la pendiente e intersección en el contexto del problema. Hizo el tratamiento en el registro simbólico para contestar las preguntas. Describió la representación gráfica.
4	7	A partir de la información dada (representación verbal) determinó la expresión algebraica. Realizó la conversión a la representación gráfica. No interpretó la pendiente e intersección en el contexto del problema.
	8	Calculó la pendiente pero no la interpretó. No realizó la conversión a la representación simbólica. Hizo la representación gráfica pero no la describió.
5	9 VATG	A partir de la información dada (representación verbal) determinó la expresión simbólica. Realizó la conversión a la representación tabular y gráfica. No interpretó la pendiente e intersección en el contexto del problema. Hizo el tratamiento en el registro simbólico para responder las preguntas. Describió la representación gráfica.

	10 VAG	A partir de la información dada (representación verbal) determinó la expresión simbólica. No interpretó la pendiente e intersección en el contexto del problema. Hizo el tratamiento en el registro simbólico para responder las preguntas. Describió la representación gráfica.

La Tabla 4.6 permite observar que algunos estudiantes tuvieron muy buen desempeño en cuanto a la comprensión de los conceptos involucrados en la actividad. Es decir en cuanto a la identificación de la pendiente (parámetro a), la intersección (parámetro b), y la escritura algebraica de la función lineal. Esto se puede describir en términos de la conversión y tratamiento de registros.

La mayoría de los estudiantes se desenvolvieron bien en el manejo de tres registros de representación, algebraico, tabular y gráfico a partir de la representación verbal.

El 50 % de los estudiantes manejaron estos tres registros (1, 2, 5, 6 y 9). Estos estudiantes se desenvolvieron bien en el registro algebraico, lograron realizar el tratamiento en este registro y posteriormente realizaron la conversión a los registros tabular y gráfico.

El 20% de los estudiantes (4 y 10) se desempeñaron de manera regular. Solo manejaron dos registros, mientras que el 30% (3, 7 y 8) tuvieron un bajo desempeño. Estos últimos alumnos intentaron trabajar con el registro algebraico, sin embargo no lograron desarrollar su habilidad para realizar el tratamiento y la conversión a otro registro.

4.3.3. Resultados de la actividad 3

La actividad 3 del instrumento de evaluación (Anexo B) era similar a la actividad 2 (Anexo A) de la cuarta sesión. Tuvo como objetivo que los estudiantes respondieran a una situación a partir del registro de que ellos utilizaran representación realizando el tratamiento y la conversión.

Tabla 4.7. Alcance de los estudiantes en la actividad 3

Pareja	Estudiante	Alcance
1	1 ATG	Escribió la representación simbólica de cada opción. Realizó la conversión al registro tabular y luego al gráfico. Con el tratamiento en el registro simbólico determinó las intersecciones para cada opción y concluyó usando estos valores.
	2 AT	Escribió la representación simbólica para cada opción. Realizó la conversión al registro tabular. Con base al tratamiento en el registro simbólico escribió la solución.
2	3	Realizó la representación tabular. No contestó.
	4 ATG	Escribió la representación simbólica de cada opción. Realizó la conversión al registro tabular y luego al gráfico. Con el tratamiento en el registro simbólico determinó las intersecciones para cada opción y concluyó usando estos valores.
3	5 ATG	Escribió la representación simbólica de cada opción. Realizó la conversión al registro tabular y luego al gráfico. Con el tratamiento en el registro simbólico determinó las intersecciones para cada opción y concluyó usando estos valores.
	6 AT	Escribió la representación simbólica de cada opción. Realizó la conversión al registro tabular. Con el tratamiento en el registro tabular concluyó de manera incompleta.

4	7 AT	Escribió la representación simbólica de cada opción. Realizó la conversión al registro tabular. Con el tratamiento en el registro tabular concluyó de manera incompleta.
	8	Realizó la representación tabular. No contestó.
5	9 ATG	Escribió la representación simbólica de cada opción. Realizó la conversión al registro tabular y luego al gráfico. Con el tratamiento en el registro algebraico y tabular concluyó.
	10 AT	Escribió la representación simbólica para cada opción. Realizó la conversión al registro tabular. Con el tratamiento en el registro tabular contestó.

De la tabla 4.7 se puede observar que algunos de los estudiantes trabajaron la actividad usando tres registros de representación, algunos usaron dos registros.

En esta actividad el 40% de los estudiantes (1, 4, 5 y 9) trabajaron la actividad manejando tres registros de representación algebraico, tabular y grafico (ATG). Estos estudiantes realizaron el tratamiento y la conversión para solucionar la situación planteada. El 40 % (2, 6, 7 y 10) manejaron dos registros algebraico y tabular (AT) con la integración de la información de estos dos registros respondieron. El 20% tuvo un bajo rendimiento, manejaron un solo registro de representación (T), sin embargo no respondieron.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones derivadas del análisis de las evidencias obtenidas en la implementación de la propuesta didáctica. También se mencionan las recomendaciones para los docentes que deseen implementar la propuesta didáctica y algunas reflexiones para mejorar la misma.

5.1. CONCLUSIONES

El propósito principal de la secuencia didáctica fue que los estudiantes desarrollaran conocimientos, habilidades y actitudes relacionadas con el concepto de función lineal y conceptos asociados. Los estudiantes debían interpretar de manera geométrica los parámetros de la representación simbólica. Para lograr este propósito se diseñaron e implementaron actividades que se trabajaron en un ambiente de resolución de problemas dándole importancia al tratamiento y conversión de los diferentes registro de representación lineal.

5.1.1. La propuesta didáctica

Esta propuesta didáctica fue diseñada para trabajarla con estudiantes que cursen la materia Matemáticas Generales en las diferentes licenciaturas de la Universidad de Quintana Roo. Las actividades estaban diseñadas para que los estudiantes hicieran uso de los diferentes registros de representación de la función lineal al resolver la secuencia didáctica. El tratamiento y la conversión de los diferentes registros fueron aspectos claves para que los estudiantes pudieran apropiarse de conceptos como pendiente y ordenada al origen, así como para propiciar que interpretaran de manera geométrica estos parámetros a partir de la representación algebraica de la función lineal.

Las actividades se ordenaron de tal manera que el alumno debía aumentar sus conocimientos al trabajar cada una de ellas, y generar ciclos de comprensión alrededor de la función lineal. La complejidad de los procedimientos necesarios para resolverlas era creciente y se requería de la integración de conocimientos previamente abordados.

5.1.2. Aprendizaje de los estudiantes

Derivado de análisis de las evidencias de cada sesión y del instrumento de evaluación, se pudo notar que la mayoría de los estudiantes tuvieron mejoría en su trabajo con la función lineal y sus diferentes registros de representación. Al inicio de trabajo con las actividades los estudiantes tenían un conocimiento muy limitado de la función lineal. Esto quedó evidenciado en sus respuestas cuando el docente preguntó acerca de lo que sabían (Sección 4.2.1). De igual manera presentaron dificultades en la interpretación de los parámetros a y b asociados a la representación algebraica de la función lineal (Figura 4.10), sin embargo la comprensión de la mayoría de los estudiantes evolucionó y lograron interpretar estos parámetros en el contexto de las situaciones que se les presentaron tanto en las actividades de la secuencia didáctica (Anexo A) como en el instrumento de evaluación (Anexo B) esto se nota claramente en la Figura 4.20 y la Figura 4.22.

La mayoría de los estudiantes tuvieron un buen desempeño en el manejo (tratamiento y conversión) de los diferentes registros de representación de la función lineal para resolver las situaciones presentadas, por ejemplo, la pareja 3 al resolver la actividad dos de la cuarta sesión (Anexo A) utilizó tres registros de representación y el tratamiento dentro de registro algebraico lo usó para responder a las preguntas (Figura 4.27). También lograron escribir la representación simbólica a partir de la representación gráfica o de la representación verbal.

La mayoría de los estudiantes logró transferir conocimientos e interpretarlos en el contexto de las actividades de la secuencia. De igual manera pudieron ajustar un modelo lineal cuando se tiene un conjunto de datos y usarlo para hacer predicciones.

5.1.3. El ambiente de trabajo

Uno de los aspectos a resaltar fue el trabajo en un ambiente de resolución de problemas ya que permitió a cada estudiante enfrentarse con situaciones cercanas a la vida real. Pudieron observar la utilidad de la modelación vía la función lineal. El trabajo en parejas y la discusión grupal permitió a los estudiantes describir, explicar, comunicar, validar y argumentar sus procedimientos realizados al momento de solucionar las situaciones en ambientes de trabajo colaborativo. Los estudiantes se involucraron en la generación de su propio conocimiento.

5.1.4. El papel del docente

El docente jugó un papel muy importante ya que al salirse del estilo tradicional de enseñanza, permitió la participación activa de los estudiantes. No solo figuró como guía en las sesiones, sino también como moderador en la discusión grupal. Resolvió las dudas de los estudiantes al momento de resolver las actividades no dándole al estudiante la respuesta sino a veces con preguntas de reflexión que llevaron al alumno a despejar sus dudas.

5.2. Recomendaciones

La secuencia didáctica junto con el ambiente de resolución de problemas fue de gran ayuda para lograr los objetivos planteados. Es altamente recomendable que los docentes que deseen hacer uso de esta secuencia, generen el ambiente diferente al tradicional en el salón de clases, en el cual los estudiantes se vean involucrados en la generación de su propio conocimiento. El profesor debe promover dentro del aula el trabajo colaborativo fomentando la participación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades. Debe apoyar para que sus alumnos sientan que los conceptos matemáticos que están estudiando son una herramienta que le puede ser de utilidad en la solución de situaciones de su vida cotidiana.

En las actividades de la propuesta didáctica (Anexo A) los estudiantes trabajaron haciendo uso de lápiz y papel. Esta propuesta podría mejorarse si se utiliza algún software dinámico y de esta manera potenciar los alcances de los estudiantes al trabajar los diferentes registros de representación de la función lineal. El estudiante podría tener una gama más amplia de funciones lineales que le permitan observar cómo cambia la posición de las gráficas cuando se mantiene fijo uno de los dos parámetros ya sea la pendiente o la intersección. Las hojas de cálculo también pudrían ser de mucha ayuda cuando el estudiante desee trabajar la representación tabular de la función lineal y observar la variación de los valores. No hay que olvidar que la tecnología se debe utilizar como una herramienta de apoyo que le permita al estudiante simplificar las operaciones y validar sus resultados. El alumno debe aprender con comprensión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov A., Laurentiev, M. *et al* (1994). *La matemática: su contenido, método y su significado*. Madrid, España: Alianza.

Bravo, G., Tavera, C. & Tibocha, G. (1999). Propuesta para explorar la comprensión de aspectos de la función lineal*. Revista EMA*, 4(2), 166-170.

Carmona, G. & Lesh, R. (2012). External Assessment in Mathematics Education. External Evaluation. In S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education.*

Carmona, L. & Greenstein, S. (2010). Investigating the Relationship Between the Problem and the Solver: Who Decides What Math Gets Used? *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 245-254). Springer.

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Educación,* 32(01), 123-138.

D'Amore B. (2004*).* Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, 35, 90-106.

División de Ciencias e Ingeniería. (2007). Programa de Estudio de Matemáticas Generales. Quintana Roo, México. UQRoo

Duval, R. (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 173-201) Ed. Hitt, F., Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics.* 61, 103–131

Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME* 9(1), 143-168.

Fonseca, J. & Alfaro, C. (2010). Resolución de problemas como estrategia metodológica en la formación de docentes de matemáticas: una propuesta*.* *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* 6, 175-191.

Gómez, P. (2002). Análisis Didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(2), 251-292.

Gómez, P. & Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, *1*(2), 79-98.

Guzmán, I. & Consigliere, L. (1992). Algunas dificultades de aprendizaje detectadas en alumnos de cálculo diferencial. *Revista educación matemática*, 4(1), 54-64.

Greeno, J., Collins, A. & Resnick, L. (2005). Cognition and Learning*. Handbook of Educational Psychology*. (pp. 15- 46). New York: Prentice Hall International.

Hitt, F. (1996). Sistemas Semióticos de Representación del Concepto de Función y su Relación con Problemas Epistemológicos y Didácticos. En F. Hiit (Ed). *Investigaciones en Matemática Educativa*. (pp. 245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días II*. Madrid. Alianza Editorial.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching and learning. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching* (pp. 205-222). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly & A., Post, T., (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In A.

Kelly, R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education.* (pp. 591-646). Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

Niss, M. (1981). Metas como un reflejo de las necesidades de la sociedad. *Estudios en educación matemática*, 2, 5-30.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). Principios para la Educación Matemática. (M. Fernández, Trad.). España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Trabajo original publicado en 2000).

Quiroga, L., Vázquez, R. & Hinojosa, M. (2004). Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Función en Estudiantes de Ingeniería. *Revista Ingeniería*. 7(24), 27-34.

Reid, M., Gareis, M., Hernández, A. & Roldán, M. (2012). Funciones con modelación matemática. *Revista Didáctica de las Matemáticas*, 81, 91-101.

Santos, L. (1997*). Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Ed. Iberoamérica.

Santos, L. (2002*).* Problematizar el estudio de las matemáticas: un aspecto esencial en la organización del currículum y en el aprendizaje de los estudiantes. *Memorias del seminario nacional: Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Colombia, 151-165.

Secretaría de Educación Pública. (2011). Acuerdo por el que se establece la articulación de la educación básica. México.

Secretaría de Educación Pública. (2012). Fortalecimiento del nivel secundaria. 10 estrategias para la mejora del logro educativo. México.

Sepulveda, A. & Santos, L. (2006). Desarrollo de Episodios de Comprensión Matemática. Revista Mexicana de Educación Matemática. 11(31), 1389-1422.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problema solving*. Nueva York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. En D. Grows (Eds.), *Handbookfor research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Mc Millan.

Simon, M. & Tzur, M. (2004). Explicating the role of mathematical task in conceptual learning: An elaboration of hypothetical learning trajectory. *Mathematical thinking and learning*, 6(2). 91-104.

Struop, W. (2007). El álgebra basada en funciones. *Centro de Diseño Generativo*. 1-7. http://generative.edb.utexas.edu/research/whitepapers/whatisFBA.htm

Ugalde, W. (2014). Desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 14(1), 1-48.

ANEXO A

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN LINEAL

SESIÓN 1

Actividad 1

Objetivo: *Esta actividad tiene como el objetivo que el estudiante observe a partir de las representaciones gráficas de las funciones el significado del parámetro* b cuando se mantiene fijo el valor de la pendiente.

En un mismo sistema de coordenadas dibuja la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

$y = x$

$y = x + 1$

$y = x + 2$

$y = x - 1$

$y = x - 2$

a)¿Qué tienen en común las gráficas?
b)¿Qué cambia en las gráficas al cambiar el valor del parámetro "b"?
c)Escribe todas tus observaciones.

Escribe la expresión simbólica para las funciones lineales que corten al eje Y en los puntos $(0,\ 5)$; $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ y en $(0,\ 0.25)$ respectivamente.

Actividad 2

Objetivo: *Esta actividad tiene como el objetivo que el estudiante observe a partir de las representaciones gráficas de las funciones el significado del parámetro* a cuando se mantiene fijo el valor de la intersección.

En un mismo sistema de coordenadas dibuja la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

$y = \frac{1}{3}x + 1$

$y = \frac{2}{3}x + 1$

$y = x + 1$

$y = -\frac{1}{3}x + 1$

$y = -\frac{2}{3}x + 1$

$y = -x + 1$

a) ¿Qué tienen en común las gráficas?
b) ¿Qué cambia en las gráficas al cambiar el valor del parámetro “a”?
c) Escribe todas tus observaciones

Actividad 3

Objetivo: el estudiante debe trazar la gráfica e interpretar en la misma representación gráfica el valor de la pendiente.

Traza la gráfica de la función $y = \frac{2}{3}x + 1$

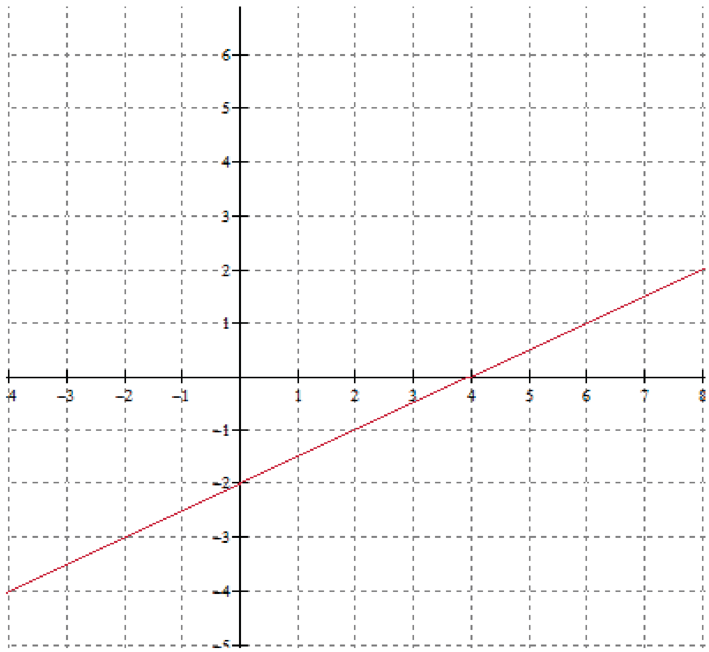
Como se representa la pendiente en la gráfica

Actividad 4

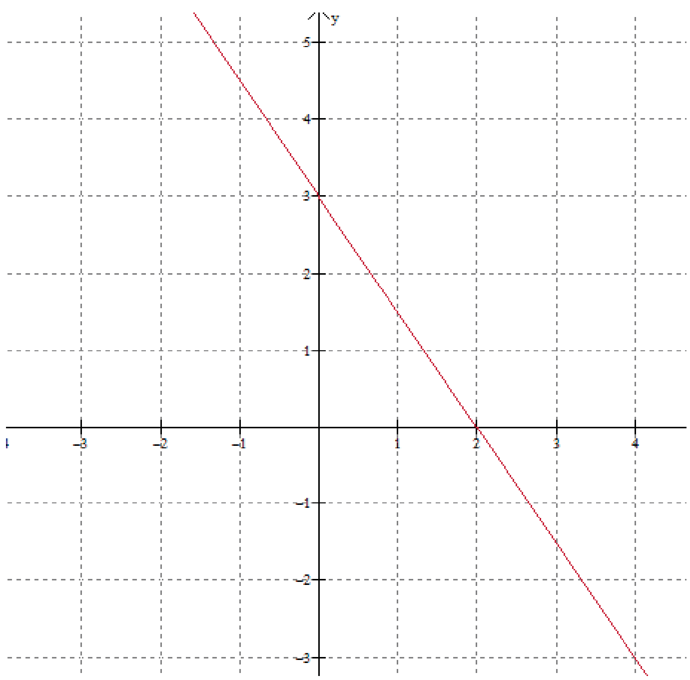
Objetivo: con la experiencia de las actividades anteriores, el estudiante debe escribir las representaciones algebraicas de cada función haciendo uso de su representación gráfica, identificando la pendiente y la intersección.

a) Realizar la misma observación pero para la función $y = -\frac{2}{3}x + 1$

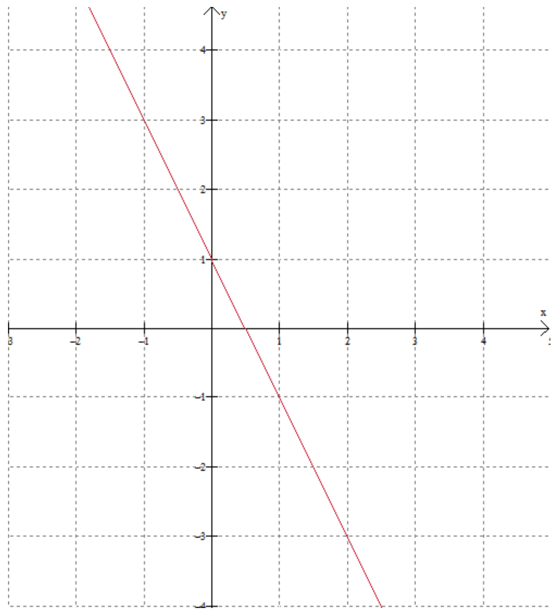
b) Hallar la expresión algebraica para las funciones cuya gráfica son las siguientes.

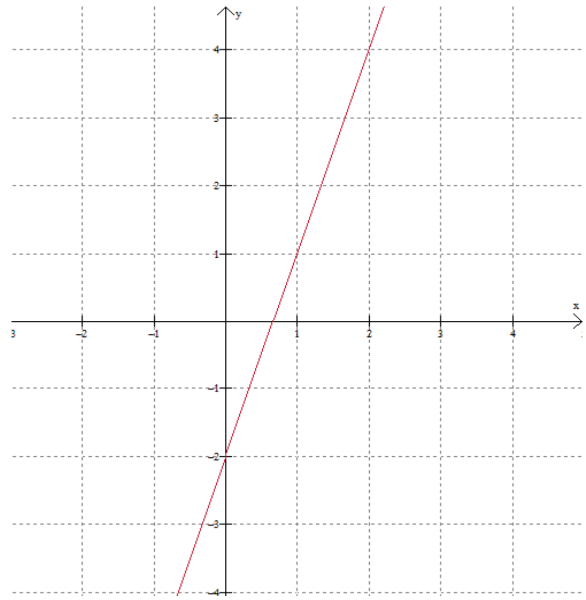


6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8



y
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3
4





SESIÓN 2
Introducción

Recordemos que la expresión simbólica de una función lineal es $y = ax + b$, en donde a es la pendiente y b es la intersección de la gráfica con el eje Y.

Si se conocen dos puntos de la gráfica de una función lineal $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ entonces la pendiente está dada por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Actividad 1

Objetivo: con esta actividad se pretende que el estudiante haga uso de la fórmula de la pendiente.

Determina la pendiente de la función lineal que pasa por los puntos:

a) A(-3, 4) y B(2, 1) b) A(-1, 1) y B(4, 3)

Para determinar el valor de del parámetro b, se debe sustituir cualquiera de los dos puntos conocidos en la expresión algebraica de la función lineal $y = ax + b$ y despejar el valor del parámetro b

Actividad 2

Objetivo: *esta actividad tiene como objetivo que el estudiante pueda escribir la representación algebraica de una función lineal conociendo dos de sus puntos.*

Determina la expresión algebraica de la función lineal que pasa por los puntos:

a) $A(2,3)$ y $B(-1,-2)$ b) $C(-3,-4)$ y $D(1,1)$

Actividad 3

Objetivo: *con los conocimientos adquiridos en las actividades previas, el estudiante debe hallar la función lineal que modela a la situación dada y hacer uso* *de las representaciones de esta función para responder a las preguntas. De igual manera debe interpretar la pendiente y las intersecciones.*

Hemos conocido a través de nuestros estudios previos que existen varios sistemas de medición de temperaturas, una de ellas se denomina escala Fahrenheit y otra, escala Celsius o Centígrada. Se sabe que una temperatura de 50°C equivale a 122°F, y que 120°C equivale a 248°F.

a) Hallar la función lineal para convertir de grados Celsius a Fahrenheit?

c) Usando la función anterior, ¿a cuántos °F equivale una temperatura de 65 °?, ¿y de -25°C?

d) ¿A cuántos grados Celsius equivale una temperatura de 345 °F? ¿De -18 °F?

e) Si un cuerpo incrementa su temperatura de 35°C a 38°C, ¿en cuánto aumenta su temperatura en °F? Lo mismo si se incrementa de -10°c a 15°C, lo mismo si cambia de 123°C a 132°C. ¿Qué puedes concluir?

f) Traza la gráfica de la función obtenida en b). ¿Qué significa las intersecciones con los ejes de coordenadas?

SESIÓN 3

Actividad 1

Objetivo: *en esta actividad los estudiantes deben hacer uso de las representaciones algebraica y gráfica de la función lineal para responder a las preguntas. Deben interpretar la pendiente e intersecciones en el contexto del problema*

A mucha gente le gusta comprar palomitas durante una función de cine. Pero las palomitas del cine son muy caras. Un gerente de cine deseaba saber cuánto más podría vender si bajara el precio de las palomitas. Deseaba saber si a un precio reducido la venta de palomitas le generaría más ganancias. Una semana puso el precio de las palomitas a 15.00 y vendió un promedio de 120 bolsas por noche. La siguiente semana colocó el precio a 23.00 y vendió un promedio de 90 bolsas por noche.

a) ¿Es posible determinar una función a partir de estos datos, la cual permita predecir el número de bolsas vendidas a otros precios? ¿Cuál sería esa función?
b) Usando la función del inciso anterior, si quisiera tener una venta de 150 bolsas ¿cuál debería ser el precio por bolsa?
c) ¿Qué precio debería tener cada bolsa para que la venta sea de 60 bolsas?
d)¿Qué número de bolsas se espera vender si el precio es de $27.00 por bolsa?
e)¿Qué número de bolsas se espera vender si el precio es de $17.00 por bolsa?
f)¿Qué dice la pendiente y las intersección de la función con los ejes sobre el número de bolsas de palomitas vendidas en varios precios?
g) Traza la gráfica de la función y descríbela completamente.

SESIÓN 4

Actividad 1

Objetivo: *el objetivo de esta actividad es que los estudiantes puedan ajustar un modelo lineal a un conjunto de datos. Que utilicen el modelo para hacer predicciones.*

La siguiente tabla muestra el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmosfera terrestre, medido en partes por millón en el observatorio del Mauna Loe de Hawái, desde 1982 hasta 2000.

Año	1986	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000
Nivel CO_2	332	335.3	338.5	341	344.3	347	351.3	354

Se desea, con estos datos hacer una predicción del nivel de dióxido de carbono para los próximos 4 años.

1. Dibuja en un sistema de coordenadas los puntos correspondientes a los datos mostrados en la tabla.

2. ¿Qué puedes decir a cerca de la tendencia de los puntos? ¿se puede ajustar alguna curva a este conjunto de datos? ¿Cuál?

3. Traza una recta que pase por dos puntos y que sea la que pienses que mejor se ajuste al conjunto de datos.

4. Con ayuda de esta recta, ¿puedes decir cual sería el nivel de CO_2 para el año 1985? ¿para 1995?, ¿para 2002? ¿Para 2004? Explica como le harías.

5. Determina la pendiente de la recta del ejercicio anterior. ¿Qué significa?

6. Escribe la ecuación de esta recta y úsala para estimar los niveles de CO_2 en los años 1985, 1995 2002 y 2004. Compara con la estimación anterior.

7. ¿En qué año se espera que el nivel de CO_2 llegue a 400 ppm?

Actividad 2

Objetivo: *El objetivo de esta actividad es que los estudiantes realicen el tratamiento y conversión de los diferentes registros de representación de la función lineal para poder dar solución a la situación planteada.*

Una persona desea montar una fábrica para producir dispositivos electrónicos, tiene tres opciones:

El proceso A implica una inversión inicial de $300 000 y produce el dispositivo a un costo de producción de $120.00 pieza.

El proceso B implica una inversión inicial de $450 000 y produce el dispositivo a un costo de producción de $100.00 pieza.

El proceso C implica una inversión inicial de $600 000 y produce el dispositivo a un costo de producción de $60.00 pieza.

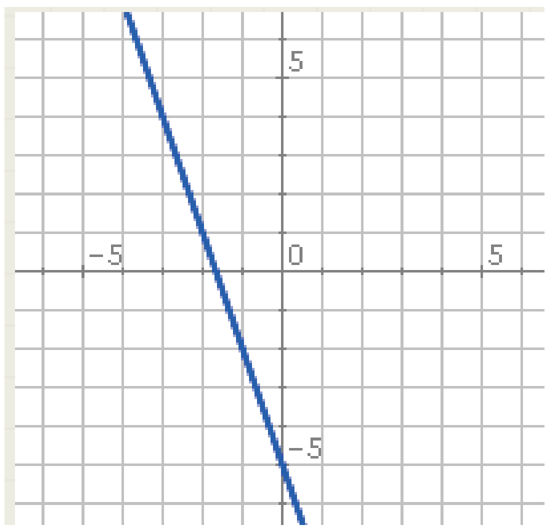
¿Qué proceso le recomendarías adquirir y por qué? Explicar ampliamente

ANEXO B

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Después de que los estudiantes hayan trabajado todas la actividades de la propuesta didáctica se espera sean capaces de resolver las tres actividades presentadas en el instrumento de evaluación.

1. Dada la gráfica de la función lineal



a) Determina su pendiente.

b) Escribe su expresión simbólica.

c) Usando la función encontrada, determina las coordenadas de cinco puntos que se localicen en la gráfica.

c) ¿el punto (-8, 24) está sobre la gráfica? ¿y el punto (8, -26/3)?

2. Un cultivo de soya produce 2.6 ton/ha aplicando una fertilización con fosfato diamónico (DAP) de 45 kg/ha, y produce 3.3 ton/ha si se fertiliza con 55 kg DAP/ha.

a) Con estos datos determina la expresión que permita calcular la cantidad de producción para una determinada cantidad de fertilización. ¿Cómo interpretas la pendiente?

b) ¿Cuál sería la producción si la fertilización fuera de 48 kg /ha? ¿y si fuera de 60kg/ha? ¿con que nivel de fertilización la producción sería cero?

c) si se requiere una producción de 3.9 ton/ha, ¿Qué cantidad de fertilización sería necesaria? ¿y si se requiere de 4.2 ton/ha?

d) Traza la gráfica de la función obtenida y descríbela completamente.

e) Otra variedad de soya se comporta diferente frente al mismo fertilizante: produce 1.9 ton/ha si se aplican 40 kg DAP/ha, y 3.8 ton/ha si se agregan 60 kg DAP/ha. Determina la expresión que permita calcular la cantidad de producción para una determinada cantidad de fertilización. ¿Cómo interpretas la pendiente?

f) ¿Cuál sería la producción si la fertilización fuera de 48 kg DAP/ha? ¿y si fuera de 55 kg/ha? ¿con que nivel de fertilización la producción sería cero?

g) si se requiere una producción de 2.5 ton/ha, ¿Qué cantidad de fertilización sería necesaria? ¿y si se requiere de 4.2 ton/ha?

h) Traza la gráfica de la función obtenida y descríbela completamente.

i) Compare el comportamiento de ambas variedades y saque conclusiones.

j) ¿Existe alguna cantidad de fertilización para la cual las producciones sean las mismas?

3. Una persona desea contratar un automóvil. Tiene tres opciones: La opción A le cobra $500.00 diarios, con derecho a 100km por día y a $6.00 km extra. La opción B le cobra $300.00 diarios, con derecho a 100 km por día y a $16.00 km extra. La opción C le cobra $800.00 diarios, con derecho a 100km por día, y sin límite de kilometraje. ¿Qué opción debe escoger?