UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO

División de Ciencias e Ingeniería

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ECUACIÓN Y FUNCIÓN LINEAL

Tesis

para obtener el grado de

Maestra en Enseñanza de las Matemáticas

PRESENTA

Alicia Lizzette Suárez Martín

Directoras de Tesis

Dra. Verónica Vargas Alejo

Dra. Martha Leticia García Rodríguez

Asesores

Dr. César Cristóbal Escalante

Dr. Víctor Soberanis Cruz

M.E.S. Roberto Acosta Olea

Chetumal, Quintana Roo, México, Agosto de 2013

UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO

División de Ciencias e Ingeniería

Trabajo de Tésis elaborado bajo supervisión del Comité de Asesoría y aprobada como requisito parcial para obtener el grado de:

Maestro en Enseñanza de las Matemáticas

Comité de Tesis

Directora:

____

Dra. Verónica Vargas Alejo

Directora:

____

Dra. Martha Leticia García Rodríguez

Asesor:

____

Dr. César Cristóbal Escalante

Asesor:

____

Dr. Víctor Soberanis Cruz

Asesor:

____

M.E.S. Roberto Acosta Olea

Chetumal, Quintana Roo, México, Agosto de 2013

AGRADECIMIENTOS

Agradezco especialmente a mi asesora de Tesis la Dra. Verónica Vargas Alejo, por su apoyo brindado, enseñanza, paciencia, ánimo, comprensión, consejos y asesoría para hacer posible esta tesis. Muchas Gracias.

Agradezco a mi codirectora Dra. Martha Leticia García Ramírez por su amabilidad, disposición, conocimientos, contribución y tiempo que le dedico a este trabajo para culminar exitosamente.

A mis asesores Víctor, Roberto y Cesar por su revisión, orientación y ayuda para culminar con este trabajo.

A mis Maestros y Doctores quienes me han forjado en esta etapa, brindado sus conocimientos, experiencias para ser mejores docentes en el proceso enseñanza-aprendizaje.

A la prestigiosa Universidad de Quintana Roo y a la Universidad Autónoma de Sinaloa porque abrió sus puertas y confió en nosotros.

A mis amigos, sin excluir a ninguno, por el apoyo y ánimo que implementaron en mí para culminar este trabajo.

A mis compañeros de escuela porque siempre existió una armonía grupal.

A todas aquellas personas que de una u otra forma contribuyeron en la realización de este trabajo de investigación.

DEDICATORIA

A mis abuelos y primos que donde quiera que estén son especiales en mi vida, se encuentran en mis recuerdos y en el corazón, me gustaría agradecerles su amistad, apoyo, ánimo y compañía. Quiero darles las gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han brindado y por sus bendiciones.

A mi Mami Alicia por ser la mejor mamá, gracias por tu motivación, la confianza que depositaste en mí, por todo tu esfuerzo, apoyo, por guiar mi camino y estar en los momentos difíciles. Gracias porque aunque este lejos has estado a mi lado. Te amo.

A mi Papi Fernando, hombre serio, sencillo y trabajador, que siempre está pendiente de mí. Gracias y comparto contigo este logro. Te amo.

A mis hermanas Aida, Gleysi, Yeimi y Arely; y hermanos Fernando, Justino, Alberth y Antoñio porque siempre me han dado fuerza y a pesar de las adversidades estamos juntos. Porque su cariño, ánimo y apoyo, me han llevado hasta donde estoy ahora. Mil gracias.

ÍNDICE

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

La presente tesis documenta el diseño y elaboración de una Propuesta Didáctica contemplando indicadores de desempeño emanados del programa de estudio que se presenta con un contexto institucional RIEMS (Reforma Integral de Educación Media Superior) con enfoque en competencias de la asignatura de matemáticas I bloque VI, referente al tema: “Ecuación y Función Lineal” para alumnos del primer semestre, del Programa de Estudios del Colegio de Bachilleres. Esta propuesta se diseñó contemplando también aportes de varios investigadores en educación matemática relacionados con la resolución de problemas y el uso de diferentes tipos de representaciones.

Se documentaron los resultados y el análisis de la implementación de la propuesta didáctica, con base en el desarrollo de conocimiento por parte de los estudiantes de bachillerato en torno a los conceptos de ecuación y función lineal, y la relación entre ellos. Dos fases esenciales caracterizaron el trabajo. La primera consistió en la elaboración de la propuesta didáctica, su implementación en fase piloto y el rediseño de la misma. En una segunda fase, la propuesta didáctica se implementó a un grupo normal de estudiantes de bachillerato, cuyas características y resultados se describen en este documento.

En el Capítulo 1 se presenta la justificación, objetivo, alcances y limitaciones de esta tesis: “Resolución de problemas de ecuación y función lineal”. Se describe también la importancia de desarrollar la propuesta didáctica, así como los alcances y limitaciones.

En el Capítulo 2 se presenta la revisión de literatura, con las teorías o documentos que fundamentan la propuesta y el análisis de los resultados. Se describen los conceptos algebraicos; la resolución de problemas y el uso de las representaciones para apoyar la comprensión de los conceptos de ecuación y función lineal.

En el Capítulo 3 se presenta la metodología de trabajo. Se describe la propuesta didáctica en lo general y cada una de las actividades que se aplicaron a los alumnos en las 10 horas que se programó la implementación de la propuesta. Se explican los criterios que se utilizaron para elaborar las actividades. Se describen los participantes, el escenario de instrucción, los elementos que permitieron obtener información respecto al aprendizaje de los estudiantes y la forma como se analizó esta información.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos; se analiza el proceso de aprendizaje de los conceptos y procedimientos emprendidos por los estudiantes al resolver las actividades y el instrumento de evaluación final. De acuerdo a esta información se presentan las dificultades y logros de aprendizaje de los estudiantes, así como el papel del profesor para apoyar el desarrollo del conocimiento.

Por último, en el Capítulo 5, se presentan las conclusiones y las recomendaciones derivadas de los resultados de este trabajo, de acuerdo a los objetivos de la propuesta didáctica. Se presentan sugerencias que pueden contribuir a mejorar los resultados descritos en esta tesis, así como la Propuesta didáctica.

Los resultados muestran que el desarrollo de conocimiento por parte de los estudiantes es un proceso que requiere de más tiempo del señalado en los planes y programas de estudio, por lo tanto, de más actividades en las cuales éstos se vean inmersos. Se identificaron dificultades de aprendizaje como las señaladas de manera reiterativa en la literatura de investigación: los estudiantes no tienen experiencia en el uso y manejo de diferentes representaciones de un concepto matemático, además, no transitan con facilidad de un registro a otro. Con esta propuesta se muestra cómo a partir de información dada en forma gráfica, tabular o simbólica puede propiciarse una discusión rica entre los estudiantes que pueda apoyar la comprensión profunda de conceptos y procedimientos, a partir del trabajo con situaciones cercanas a su entorno real.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describen los objetivos, alcances y limitaciones de esta tesis: "Resolución de problemas de ecuación y función lineal". Se presenta la justificación e importancia del diseño e implementación de una propuesta didáctica orientada hacia el aprendizaje de la ecuación y función lineal. Para ello se presenta el contexto institucional, el programa de estudio RIEMS (Reforma Integral de educación Media Superior) así como estudios que se han realizado dentro de la temática o problemática del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas que aquí interesa abordar. También, se justifica la importancia de orientar la propuesta didáctica hacia estudiantes de bachillerato y la viabilidad de ésta.

1. 1. Antecedentes

La Educación Media Superior (EMS) en México está compuesta de varios subsistemas: en modalidad escolarizada se encuentran los Centros de Estudios de Bachillerato, la Preparatoria Federal, los Colegios de Bachilleres, las Preparatorias Federales por Cooperación, las Escuelas Preparatorias Particulares Incorporadas; en modalidad no escolarizada la Preparatoria Abierta; y en las modalidades mixtas el Bachillerato Semiescolarizado y la Educación Media Superior a Distancia. Estos subsistemas operan de esta manera (Subsecretaría de Educación Media Superior de la

SEP, 2008) porque no presentan un panorama general articulado; su propósito es formar personas con conocimientos y habilidades básicas para continuar con sus estudios superiores o desenvolverse en el trabajo y en su vida.

En la Reforma Integral de la Educación Media Superior (Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP, 2008) se estableció la Creación de un Sistema de Nacional de Bachillerato en un Marco de Diversidad integrado por la Subsecretaria de Educación Media Superior de la Secretaria de Educación Pública de México, donde contemplan cuatro ejes Construcción del Marco Curricular Común (MCC) con base en competencias:

> 1. Construcción del Marco Curricular Común (MCC) con base en competencias permite articular los programas de distintas opciones de educación superior (EMS) en el país. Comprende desempeños terminales expresados como competencias genéricas, disciplinares básicas, competencias disciplinares extendidas (de carácter propedéutico) y competencias profesionales (para el trabajo).
> 2. Características de las distintas opciones de operación de la EMS, en el marco de las modalidades que contempla la Ley General de Educación: escolarizada, no escolarizada y mixta; de manera que puedan ser reguladas e integradas de forma efectiva al Sistema Educativo del país, y por lo tanto al SNB.
> 3. Los mecanismos de gestión de la Reforma Integral porque define estándares y procesos comunes que garantizan el apego al MCC para fortalecer el desempeño académico de los alumnos para mejorar la calidad de las instituciones. También le da importancia a la formación y actualización docente, tutorías así como la definición de estándares aplicables a las instalaciones y equipamiento. Profesionalización de la gestión escolar; el tránsito entre subsistemas y escuela, y la evaluación integral.
> 4. La institución proporciona un certificado de estudios, pero además el SNB propone otorgar una certificación nacional que será complementaria a la que emite la institución que contribuirá a que la EMS alcance una mayor cohesión donde se reflejará identidad del bachillerato (p. 5).

Este trabajo se ubica en el primer eje que es el Marco Curricular Común. En éste se presenta la asignatura de matemáticas del componente básico del currículo del bachillerato general donde el programa de estudios contiene al conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes mínimos que todo estudiante debe adquirir.

En la Reforma Integral de la Educación Media Superior (Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP, 2008) se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato, se destaca:

- El desarrollo personal y social de los futuros ciudadanos, a través de las competencias genéricas, las cuales tendrán aplicación en diversos contextos (personal, social, académico y laboral) y tienen un impacto más allá de cualquier disciplina o asignatura que curse un estudiante.
- El desarrollo de capacidades académicas que posibiliten a los estudiantes a continuar sus estudios superiores, al propiciarles las competencias disciplinares básicas y/o extendidas, que les permitan participar en la sociedad del conocimiento.
- El desarrollo de capacidades específicas para una posible inserción en el mercado laboral, mediante las competencias profesionales básicas o extendidas (p. 47).

El programa de estudio de la asignatura de matemáticas I, que es el campo de conocimientos de matemáticas en el Marco Curricular Común, tiene la finalidad de propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven al despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas matemáticos que en sus aplicaciones trascienden el ámbito escolar. Por lo que se establecieron las competencias disciplinares básicas del campo de las matemáticas (Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP, 2009).

El objetivo de las competencias disciplinares básicas de matemáticas en el bachillerato es propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico en el estudiante del bachillerato; lo cual le facilitará que argumente y estructure mejor sus ideas y razonamientos. Para alcanzar este objetivo se establecen ocho competencias disciplinares básicas en el bachillerato:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analizar la relación entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

El propósito de matemáticas I en el bachillerato es consolidar y diversificar los aprendizajes y desempeños adquiridos, ampliando y profundizando los conocimientos, habilidades, actitudes y valores relacionados, promoviendo el uso de las representaciones y procedimientos algebraicos para resolver situaciones de su entorno que impliquen el manejo de magnitudes variables y constantes.

El programa de estudios de la RIEMS (Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP, 2009) sugiere que más allá de la simple obtención de resultados numéricos y la excesiva ejercitación de técnicas rutinarias descontextualizadas, el profesor construya o seleccione actividades para propiciar el desarrollo de las competencias en el estudiante, donde el énfasis esté puesto en los procesos de construcción y aplicación del conocimiento matemático, la elección de procedimientos en la resolución de problemas y en el dominio de los algoritmos que los sintetizan. Estas actividades deben incorporar distintos tipos de registros e interpretación de información matemática, así como códigos de representación y comunicación de sus ideas, permitir interrelacionar contenidos de diferentes ramas de la matemática y de otros campos del conocimiento, de modo que posibiliten ampliar la visión del mundo que posee el estudiante y contribuyan a la comprensión y solución de problemas de su entorno (Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP, 2009).

El programa de estudios (Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP, *ibid.*) enfatiza la necesidad de abandonar un enfoque de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basado en la resolución de ejercicios y problemas mediante la mecanización de procedimientos y algoritmos. Promueve un enfoque donde el estudiante tenga la posibilidad de resolver problemas haciendo uso de diferentes representaciones (gráfica, tabulación y expresión algebraica) que le permitan comprender y resolver situaciones o problemas y profundizar en la reflexión de los conceptos matemáticos, en particular en el aprendizaje de la ecuación y función lineal, donde se manejan magnitudes constantes y variables. Esto se ve reflejado en los saberes requeridos (conocimientos, habilidades, actitudes) e indicadores que se presentan en el bloque VI del programa de estudios de bachillerato.

En el bloque VI se presentan 8 indicadores de desempeño, de los cuales únicamente se consideraron cuatro para la elaboración de la secuencia didáctica que se discute en este documento. Los cuatro indicadores, que en seguida se mencionan, emanan de los saberes requeridos: conocimiento, habilidades y actitudes (Tabla 1.1).

Tabla 1.1. Saberes requeridos para el logro de la unidad de competencia bloque VI del programa de estudios de la Reforma (Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP, 2009).

CONOCIMIENTOS	HABILIDADES	ACTITUDES Y VALORES
• Analiza y modela situaciones empleando ecuaciones lineales. • Describe técnicas para resolver ecuaciones lineales en una variable. • Identifica la relación entre funciones y ecuaciones lineales. • Reconoce la ecuación en dos variables y= mx + b como la forma de la función lineal, y las ecuaciones en una variable a= mx + b, como casos particulares de la anterior. • Identifica los parámetros m y b para determinar el comportamiento de la gráfica de una función lineal.	• Aplica diversas técnicas para resolver ecuaciones lineales en una variable. • Formula y soluciona problemas, con técnicas algebraicas, en situaciones que se representan mediante ecuaciones lineales. • Utiliza los parámetros m y b para determinar el comportamiento de la gráfica de una función lineal. • Aplica diversas técnicas para graficar la función lineal. • Transita de ecuaciones a funciones lineales, y viceversa, al modelar y solucionar diversas situaciones. • Explica cómo será la gráfica de la función lineal, a partir de los parámetros m y b.	• Valora la importancia de la conexión de entre funciones y ecuaciones lineales, para examinar y solucionar situaciones. • Aprecia las representaciones gráficas de funciones como instrumentos de análisis visual de su comportamiento. • Aprecia la utilidad de las técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones, para simplificar procesos y obtener soluciones precisas. • Asume una actitud de apertura que favorece la solución de problemas. • Propone maneras creativas de solucionar un problema.

Indicadores de desempeño

1. Utiliza la relación matemática entre dos magnitudes, linealmente interdependientes, para calcular una de ellas a partir de la otra y realizar tabulaciones y gráficas de funciones lineales.
2. Describe el comportamiento[1] de las variables y los resultados obtenidos, al solucionar problemas de ecuaciones y/o funciones lineales.
3. Comprueba las soluciones de un problema en el modelo lineal[2] para obtener su solución y explica porque algún (os) resultado (s) del modelo lineal son inadmisibles en el contexto del problema.
4. Utiliza diagramas[3] para expresar la relación entre los datos e incógnitas en problemas de mezclas, velocidades, movimiento rectilíneo, entre otros.

1.2. Justificación

Las matemáticas en la actualidad son empleadas en todas las áreas del quehacer humano, desde las actividades cotidianas hasta la investigación científica, la producción y la prestación de servicios (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1996; NCTM, 2000/2003; Michelsen, 2006).

Sánchez citado por Brihuega (2000) comenta que: "Las Matemáticas no deben enseñarse ya de una manera expositiva, estática, transmitida por el profesor a un conjunto de alumnos pasivos. Es preciso que estos participen, observen, exploren hagan conjeturas y se enfrenten con problemas que les interesan" (p. 10) ya que de esta manera

---

[1] Este indicador para efectos de esta tesis lo interpretamos como sigue: "Describe en forma verbal las variables y los resultados obtenidos, al solucionar problemas de ecuaciones y/o funciones lineales".
[2] Nos referiremos a la habilidad y comprensión del estudiante para analizar o evaluar cuándo la solución obtenida es válida a partir de la ecuación, gráfica o tabla.
[3] Nos referiremos a Diagrama como tablas, gráficas y ecuaciones.

serán individuos deductivos, críticos y analíticos. Varios investigadores coinciden en este sentido (De Corte, 2007; Kilpatrick, 2002; Santos, 1997; Schoenfeld. 1992).

La meta central del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles educativos es que los estudiantes logren un aprendizaje de las matemáticas que les son enseñadas, de manera que desarrollen una comprensión profunda de los conceptos y procedimientos, y que las puedan utilizar en actividades fuera de la escuela (NCTM, 2000/2003). ¿Qué se debe entender por desarrollar una comprensión profunda de los conceptos matemáticos? Dar respuesta a esta pregunta es importante para el diseño y desarrollo del currículo y de los procesos de instrucción y de evaluación del aprendizaje.

En los diferentes niveles educativos se debe procurar dar énfasis al estudio de las matemáticas, para que el alumno aprenda a utilizarlas no sólo para resolver problemas dentro del aula, sino también para enfrentarse a las oportunidades que la vida cotidiana le presenta, sin temor al fracaso. La relación que se establece entre docente-alumno tiene un lugar dentro y fuera del contexto escolar, el docente, mediante la elección de estrategias de enseñanza, puede propiciar el desarrollo de actitudes positivas para el aprendizaje de las matemáticas por parte del alumno, con lo que éste podrá ser capaz de desenvolverse en otras áreas del conocimiento.

Se ha observado que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2000/2003). El aprendizaje, en general, requiere de la formación por parte de los estudiantes de diferentes representaciones de los objetos y procesos que ocurren a su alrededor. Estas representaciones tienen varias funciones, entre ellas, una asociada al sistema cognitivo, que es la función simbólica. Simbolizar es la capacidad de concebir que algo tome el lugar de otra cosa. El conjunto de representaciones, mediadas por las convenciones sociales, es utilizado como parte del lenguaje. Durante el proceso de formación de un concepto en la mente del individuo éste utiliza varias representaciones (icónica, simbólica, lenguaje natural). Para el aprendizaje de la función y de la ecuación lineal es necesario el trabajo con diferentes representaciones. Por ejemplo en la Tabla 1.1, se establecen los saberes que se recomienda desarrollen los estudiantes para estos temas. Esto pone de manifiesto la necesidad de formular propuestas para lograr estos saberes.

Por otra parte, cabe mencionar que no todos los estudiantes de bachillerato continúan sus estudios hasta un nivel universitario por diversos factores. Lo que obliga al docente a que enseñe conocimientos y habilidades útiles para su vida cotidiana. Es necesario que el alumno adquiera herramientas suficientes para poder analizar e interpretar graficas y tablas, así como trabajar con funciones y ecuaciones lineales, las cuáles es común encontrarse en el entorno cercano del individuo.

En esta tesis se documenta el diseño e implementación de una propuesta didáctica (secuencia de actividades) cuyo objetivo es propiciar el aprendizaje de la ecuación y función lineal. La secuencia de actividades aquí propuesta es importante para el educando porque permite, que éste se apropie y profundice conceptos como función lineal y ecuación lineal y la relación entre ambos, mediante el uso de diferentes registros de representación que permitan relacionar ambos conceptos y propiciar un aprendizaje con mayor comprensión. Se utilizan en la secuencia problemas muy cercanos al contexto o vida cotidiana de los alumnos.

Este trabajo es importante porque ofrece al docente una alternativa para enseñar el tema aquí propuesto, de una manera tal que fomente motivación en los jóvenes por el aprendizaje de las matemáticas. Da elementos al docente respecto a las dificultades que presenta el educando en la construcción de gráficas, interpretación y elaboración de tablas; el modelo algebraico de la ecuación y función lineal en la resolución de problemas que posibilitan la generalización y formalización de situaciones con el propósito de desarrollar competencias en el bachillerato.

Finalmente la propuesta didáctica es importante para la institución porque responde a demandas propias de la Reforma, para la cual hasta el momento no hay propuestas diseñadas, que además hayan sido implementadas en el aula y documentadas.

1.3. Objetivo

El objetivo de esta tesis es documentar el diseño y analizar la implementación de una propuesta didáctica[4] estructurada para que los estudiantes de bachillerato profundizaran su conocimiento en torno a los conceptos de ecuación y función lineal, y la relación entre ellos, mediante el uso de diferentes representaciones como: tabla, gráfica y expresión algebraica en un ambiente de resolución de problemas.

[4] Propuesta Didáctica y Secuencia de actividades serán usadas como sinónimos en esta tesis.

1.4. Alcances y limitaciones del proyecto

La propuesta didáctica documentada en esta tesis está elaborada con problemas de un contexto cotidiano, que permiten que el alumno problematice situaciones cercanas a su entorno y relacione conceptos como ecuación y función lineal; los cuales siempre se ven en el currículo de forma aislada entre sí. Responde a demandas específicas de la RIEMS. Se puede implementar en ambiente de lápiz y papel, y con herramientas que los docentes siempre tienen al alcance en sus escuelas: pizarrón, marcadores, hojas cuadriculadas. Va más allá de una memorización de procedimientos y ejercitación. Al implementarse en el ambiente de aprendizaje que se propone, permite que los estudiantes desarrollen hábitos, habilidades y actitudes, a la vez, que profundicen en conocimientos, es decir, fomenta el desarrollo de competencias genéricas y disciplinares con relación a los conceptos de ecuación y función lineal mediante el manejo de representaciones (tablas, gráficas y símbolos).

El estudio se restringe a dos temas: ecuación y función lineal, que se abordan en el bloque VI del programa de estudios, que se implementa a lo largo de un semestre, es decir, incluye sólo una parte del contenido de la asignatura de matemáticas I. No prepara al alumno para automatizar procesos, como el manejo algebraico de ecuaciones y algoritmos de resolución. No se incorporan ejercicios algorítmicos donde el estudiante deba mecanizar procedimientos. La aplicación se desarrolló para estudiantes que ya habían cursado el bloque VI, una vez, visto los temas de ecuación y función lineal en su semestre, ya tenían ciertos conocimientos previos desarrollados en el tema. De esta manera, la información que aquí se presenta son las respuestas de jóvenes que ya habían abordado en clases el contenido del bloque VI. Otra limitante se relaciona con que el alumno resuelve problemas restringidos sólo a algunos contextos, debido a cuestiones de tiempo.

1.5. Viabilidad de la propuesta

La implementación de esta propuesta en el aula no necesita de muchos requerimientos en infraestructura, puede llevarse a cabo en un aula normal de cualquier escuela. El ambiente para el cual se diseñó fue de lápiz y papel, no se consideró el uso de tecnología. Para obtener resultados similares a los obtenidos en este documento se sugiere que se aplique en condiciones similares a las descritas en el Capítulo 3 de esta tesis, por ejemplo, en cuanto a recursos didácticos, ambiente de trabajo en el aula y papel del docente. La población de estudiantes puede estar cursando el bloque VI del programa de estudios de bachillerato. Es importante mencionar que al final de este documento se incorporan ciertas recomendaciones para mejorar la propuesta.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE LITERATURA

En este capítulo se analizan las principales aportaciones teóricas que sustentan el diseño de la propuesta didáctica, es decir, el tipo de actividades que la componen, la creación de ambientes de instrucción, los conceptos algebraicos involucrados y el tipo de evaluación de aprendizajes propuestos. Se profundiza en el significado de aprendizaje matemático, aprendizaje algebraico, la resolución de problemas, y el uso de diferentes registros de representación para apoyar la comprensión de conceptos.

2.1. Las matemáticas en la educación del individuo

Los seres humanos, para desarrollarse en la vida, necesitan tener información acerca de dónde vienen, ya que si no conocen su pasado difícilmente podrán comprender quiénes son y hacia dónde van. La matemática posee una enorme aplicabilidad en nuestro entorno, forma parte del escenario social que nos rodea, además de que constituye un lenguaje y marco indispensable para muchas ciencias. Éstas son algunas de las razones por las cuales no solamente unas cuantas personas se especializan en ella sino que, además, se considera como una de las materias de estudio contempladas en el sistema educativo.

Por ejemplo, el NCTM (2000/2003) señala:

> Vivimos tiempos de extraordinarios y acelerados cambios. Surgen y evolucionan continuamente nuevos conocimientos, herramientas y formas de usar y comunicar las matemáticas. Las calculadoras, demasiado caras en los años 80, no sólo son ahora frecuentes y baratas sino considerablemente más potentes. La información cuantitativa, hace unos pocos años estaba disponible sólo para un número limitado de personas, se difunde ahora ampliamente a través de los medios de comunicación.
>
> Nunca ha sido mayor, y seguirá aumentando, la necesidad de entender y ser capaz de usar matemáticas en la vida diaria y en el trabajo (p.4).

El NCTM (2000/2003, p. 4) identifica cuatro aspectos importantes por los que el aprendizaje de las matemáticas debe fomentarse: matemáticas para la vida, matemáticas como herencia cultural, matemáticas para el trabajo y matemáticas para la comunidad científica y técnica. Señala además, que:

> En este mundo cambiante, aquellos que comprendan y puedan usar matemáticas tendrán cada vez más oportunidades y opciones para determinar su futuro. La competencia matemática abre puertas a un porvenir productivo; su carencia las mantiene cerradas. El NCTM no está de acuerdo con la pretensión de que las matemáticas son sólo para unos poco elegidos. Por el contrario, todos necesitan entenderlas. Todos los estudiantes deberían tener la oportunidad y el necesario apoyo para aprender conceptos matemáticos importantes con profundidad y comprensión (p. 5).

Pero ¿Qué significa aprender matemáticas? ¿Qué significa aprender conceptos con profundidad y comprensión? Reflexiones en este sentido han sido planteadas en diversos documentos, algunos de ellos se retoman a continuación.

2.2. El aprendizaje de las matemáticas

Actualmente los programas de estudio y los libros de texto que se utilizan en el bachillerato presentan a las matemáticas como una rama que se debe enseñar considerando diferentes representaciones de las relaciones entre las variables y modelos matemáticos.

De acuerdo con Freudenthal (1968), Schoenfeld (1991) y Furinghetti (1993) citados por Cristóbal (2010):

> Las concepciones sobre las matemáticas que se han utilizado en el ámbito educativo han evolucionado, desde aquella que las considera como un compendio de hechos y procedimientos (que tratan de cantidades, magnitudes y formas, y de sus relaciones), como un conjunto de conocimientos fijos, pulidos y acabados (con una metodología de trabajo y un lenguaje formal), y como una disciplina fría y austera con poco espacio para la reflexión y la creatividad (donde aprender matemáticas es tener dominio de esos hechos y procedimientos) hasta una concepción de las matemáticas que las considera como un conjunto de conocimientos organizados, formalizados y sistematizados (producto de la actividad social realizada por personas en diversos contextos sociales) y como una disciplina que utiliza diferentes métodos para indagar, preguntar, analizar, buscar respuestas, justificar y argumentar conjeturas (p. 1).

Schoenfeld (1992) considera a las matemáticas como:

> una actividad inherentemente social, en la que una comunidad de practicantes entrenados (los científicos matemáticos) buscan en la ciencia, - mediante intentos sistemáticos, basados en la observación, el estudio y la experimentación- estructuras para determinar la naturaleza o principios de regularidades en sistemas definidos axiomática o teóricamente (“matemáticas puras”) o modelos de sistemas abstraídos de objetos del mundo real (“matemáticas aplicadas”). Las herramientas de las matemáticas son la abstracción, la representación, y la manipulación simbólica. Sin embargo, estar entrenado para usar esas herramientas no significa que uno piense matemáticamente así como conocer las herramientas hace a un artesano. Aprender a pensar matemáticamente significa (a) desarrollar un punto de vista matemático – valorando los procesos de matematización y abstracción y tener predilección para aplicarlas, y (b) desarrollar competencia con las herramientas del mercado, y usar esas herramientas para servicio de la meta de entender la estructura - darle sentido matemático (p. 3).

En general, la mayor parte de los documentos que hacen planteamientos sobre la concepción de las matemáticas, también hacen propuestas sobre lo que se debe aprender y cómo se debe aprender (por ejemplo, NCTM, 2000/2003, Santos, 1997). Aunque son de carácter muy general, esas propuestas sirven como directrices para el diseño, desarrollo y exploración de actividades de instrucción. Las propuestas, por lo general, no son contradictorias, y tienden a ser complementarias, como se ve en el siguiente listado que caracteriza y resume en forma genérica lo que los estudiantes deben aprender en los cursos de matemáticas (Cristóbal, 2010):

- Conocimientos básicos sobre conceptos, relaciones y procedimientos.
- Desarrollar habilidades y hábitos útiles para pensar y actuar matemáticamente, es decir que utilicen habilidades y estrategias de manera sistemática y pertinente.
- Explorar situaciones buscando patrones.
- Elaborar conjeturas y sustentarlas.
- Elaborar argumentos y exponerlos.
- Utilizar diferentes representaciones.
- Comunicar sus ideas.

- Discutir con otros.
- Desarrollar y utilizar criterios para evaluar enunciados.
- Describir constructos.
- Definir constructos.
- Elaborar clasificaciones de objetos.

2.3. Resolución de problemas

La palabra "problema" proviene del prefijo griego πρo-(pro- = delante) y βημα (blema=lanzamiento). Schoenfeld (1985), menciona que el termino *problema* se refiere a una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacerlo.

La resolución de problemas es una teoría basada en los trabajos de Polya y Schoenfeld donde es importante la manera como se concibe el estudio de la matemática, el contexto en el cual se aprende la disciplina y sobre todo los problemas con los cuales se propicia el aprendizaje de las matemáticas.

Schoenfeld (1992) menciona que:

> La Resolución de problemas es una tendencia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que promueve el desarrollo de una comunidad de estudiantes en el aula donde se origine en los estudiantes el desarrollo de las características propias de la comunidad de investigadores en matemáticas. El trabajo activo y colaborativo por parte de los estudiantes es sustancial en esta tendencia.

La resolución de problemas ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades y utilizar diversas estrategias para el aprendizaje de las matemáticas. Cuando se habla de problema no se vincula únicamente con situaciones de contexto, existe la posibilidad de que un ejercicio sea un problema, depende de los recursos y experiencia con que cuenta el estudiante quien puede aplicar diferentes procedimientos de solución, los cuales pueden propiciar el desarrollo de conocimientos matemáticos.

El intercambio de las ideas, experiencias, conjeturas entre otros son factores de vital importancia para los alumnos, porque los ayudan a desarrollar el razonamiento y los procesos de adquisición de significados, lo que ocasiona que se responsabilicen de su propio aprendizaje.

De acuerdo con Schoenfeld (*ibid*) se deben dominar técnicas y estrategias que sirvan de apoyo para encontrar la solución del problema. Se requiere además del dominio del conocimiento, como es el caso de las matemáticas que necesitamos, de otros factores como el control, ya que es la voz interior dice las ideas y estrategias que debemos aplicar para el problema que tenemos en las manos, o en su caso qué camino debemos tomar para llegar al resultado correcto.

2.4. Papel del docente en la resolución de problemas

El papel del docente en el aprendizaje de las matemáticas vía resolución de problemas es central porque puede apoyar el desarrollo de conocimientos, experiencias, y habilidades. El docente influye de manera determinante en el aula para fomentar la creación del espacio de aprendizaje (Grows, 2004), donde los alumnos de manera continua, formulen preguntas y conjeturas, exploren, comuniquen, argumenten y validen sus ideas, aspectos importantes para la construcción de ideas matemáticas tanto en lápiz y papel como tecnológicos.

La práctica docente debería estar siempre en constante evaluación con el propósito de propiciar ambientes de aprendizajes donde los alumnos formulen preguntas y conjeturas, exploren, comuniquen, argumenten sus ideas en matemáticas en ambientes de lápiz y papel del área de matemáticas. Asimismo, los profesores deben de entender y comprender a los alumnos porque no todos tienen las mismas habilidades y actitudes, además deben confiar en ellos y propiciar la toma de decisiones. También el docente debe en constante actualización, reflexión y esfuerzo para conseguir mejores resultados.

Un punto de vista dinámico de las matemáticas conlleva a un ambiente de aprendizaje que tienda:

a) Hacia la aceptación de un salón de clases como una comunidad de matemática.
b) Hacia el uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación, contrapuesto a ver al maestro como la sola autoridad para dar las respuestas correctas.
c) Hacia el desarrollo del razonamiento matemático; es decir, no ubicar a las matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas para memorizar.
d) Hacia la resolución de problemas y no solamente dar énfasis a la actividad de encontrar respuestas mecánicamente.
e) Hacia la conexión y aplicación de las matemáticas; es decir, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

La implantación de este tipo de actividades en el salón de clases se relaciona con el potencial que el maestro identifique en su práctica docente (Santos, 1997). Los profesores al estar convencidos de estas ideas muestran una perspectiva diferente sobre el aprendizaje de los estudiantes. Esto puede ser un punto inicial para incorporar actividades de instrucción diferentes a las tradicionales. Sin embargo, es importante que a la par se diseñen estas actividades, también se desarrollen materiales que sirvan de apoyo y como medio para implantar la resolución de problemas dentro del aula.

En la aplicación de la resolución de problemas no necesariamente se puede ver inmediatamente reflejado un cambio en los estudiantes ya que, se requiere de tiempo para ver resultados satisfactorios. Sin embargo, existe evidencia de que los estudiantes muestran claros avances cualitativos en algún momento de su aprendizaje (Santos, 1997).

2.5. Comprensión y transferencia del aprendizaje y contexto

El aprendizaje de las matemáticas es de importancia para los estudiantes de bachillerato, ya que pueden aplicar los conocimientos aprendidos en su contexto o a situaciones para resolver problemas similares o diferentes. Asimismo los estudiantes deben reflexionar acerca de los conceptos, problemas y la diversidad de estrategias para la solución de problemas durante su aprendizaje de las matemáticas.

El papel del contexto en la transferencia de estrategias, se relaciona con la propuesta de la resolución de problemas (Santos, 1997). El contexto en el que se aprenden los conocimientos iniciales es importante para lograr una transferencia del mismo. Si existe semejanza entre el contexto de transferencia y el contexto en el cual se desarrolló el conocimiento, la probabilidad de que un estudiante pueda hacer la transferencia es mayor.

En el aprendizaje de las matemáticas existe la transferencia como una componente en la resolución de problemas: ¿El estudiante puede transferir su experiencia para resolver problemas de su contexto y después ser capaz de transferirlos a otros contextos diferentes?

Es importante que los estudiantes aprendan a reflexionar acerca de lo que hacen al resolver los problemas, porque les ayuda a profundizar en el conocimiento y a aplicarlo adecuadamente.

De acuerdo con Schoenfeld (Santos, 1997), se recomienda que los estudiantes reflexionen en las siguientes preguntas: ¿Qué estoy haciendo ahora? ¿Me está llevando esto a algún lugar? ¿Qué otra cosa puedo hacer en lugar de continuar con esto? Además, la reflexión alrededor de estas preguntas ayuda al individuo a evitar que se persevere o se explore un solo camino en forma improductiva (p. 35).

2.6. Aprendizaje colaborativo

Actualmente, la educación invita a que las actividades de enseñanza y aprendizaje se realicen con trabajos colaborativos con el propósito de que el estudiante desarrolle actitudes, conocimiento y habilidades matemáticas como persona.

El aprendizaje colaborativo está compuesto de dos palabras importantes cuyo significado se relaciona con el trabajo que realiza un grupo de individuos que siguen un mismo objetivo o meta, donde cada uno de ellos se siente comprometido logrando una actitud positiva, con el propósito de participar, para alcanzar el objetivo.

Es importante que el docente diseñe los objetivos, materiales de trabajo, la división de temas, el diseño de las preguntas esenciales con el propósito de que los estudiantes construyan nuevo conocimiento y no se oriente sólo a la memorización o mecanización de conocimientos (Yackel & Rasmussen, 2002).

En las aulas el docente en matemáticas aplica la estrategia de reunir a los alumnos por equipos con el propósito de solucionar problemas de su contexto, donde les da la oportunidad de intercambiar ideas, experiencias, conocimientos, conjeturas, explicar las diferentes estrategias a los integrantes del equipo.

En la resolución de problemas el papel del profesor es fundamental, pues influye de manera determinante en la creación del espacio de aprendizaje. El profesor puede favorecer ambientes donde se promuevan aspectos como los señalados por Schoenfeld (1992): percibir estructuras, buscar conexiones, expresar patrones de manera simbólica, conjeturar, probar, abstraer y generalizar, así como valorar el desarrollo de una solución significativa personal por parte del estudiante, la justificación y explicación de conjeturas para otros, la toma de sentido de las explicaciones y justificaciones de otros; el cuestionamiento y desafío a los compañeros si no hubo comprensión o hay desacuerdo.

Cada participante puede realizar actividades individuales y procesos cognitivos relevantes para el aprendizaje, como los mencionados por Schoenfeld (*ibid).* Pero al interactuar con los compañeros se realizan otros aspectos cognitivos importantes como la reflexión y el refinamiento de ideas, concepciones, argumentos, propuestas de procedimientos, así como la verificación de soluciones. Estos procesos favorecen el desarrollo de conocimiento de los estudiantes (Yackel & Rasmussen, 2002).

El aprendizaje colaborativo ayuda a los alumnos a desarrollar sus habilidades, destrezas y conocimientos.

2.7. Uso de representaciones en matemáticas

Las representaciones en las matemáticas se consideran importantes para el desarrollo del pensamiento matemático, porque apoyan la comprensión de los conceptos matemáticos y llegan a ser herramientas útiles para resolver problemas de contexto.

El término representación es complejo y está abierto a muchas interpretaciones (Rico, 2000). En esta tesis utilizaremos la palabra representación para referirnos a los registros algebraicos, registros gráficos y registros tabulares. Dichas representaciones son instrumentos útiles para la resolución de diferentes tipos de problemas de la vida cotidiana. Cada registro proporciona diferente información con respecto al problema que se esté solucionando, así como del concepto matemático que se está utilizando. De acuerdo con Duval (2004) la comprensión que un estudiante pueda tener de un concepto matemático depende estrechamente de la capacidad de usar varios registros de representación para estos conceptos, de poder *tratar* las representaciones obtenidas al interior de un registro establecido y de *convertir* las representaciones de un registro a otro. Por ejemplo, es posible representar el concepto de función en un registro algebraico, registro gráfico, registro verbal y registro tabular. Por otra parte un estudiante con una buena comprensión del concepto debería poder transitar de un registro a otro, por ejemplo de una expresión algebraica a una gráfica, viceversa y, en general, debería poder *convertir* las representaciones de un registro a otro. También, debería poder *tratar* o desenvolverse bien en cada uno de los registros, mostrando capacidad por ejemplo de manejo simbólico en el registro algebraico.

2.8. Algebra, razonamiento algebraico

En el área de las matemáticas es importante comprender pero sobre todo mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje del algebra en el salón de clase (Kieran, 2006). Asimismo, existe inquietud de que el aprendizaje del algebra no necesariamente debe enseñarse de una manera tradicional, es decir, donde el álgebra sea considerada como un proceso de memorización y práctica de ejercicios. Como menciona Kaput (1999) el álgebra que tradicionalmente se ha enseñado y aprendido en las aulas debe cambiar por una más amplia, más profunda, y más rica donde la ruta para aprenderla sea mediante la generalización y la expresión de esta generalidad en lenguajes cada vez más formales, donde la generalización empiece desde aritmética, modelación de situaciones, geometría y, en general, desde las matemáticas que hay o deberían aparecer en los grados elementales (pp.134-135). Kaput (1999) menciona que:

> La generalización involucra la extensión, de manera deliberada, del razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, la identificación y exposición explícita de lo común en varias situaciones, o el surgimiento del razonamiento o comunicación en un nivel donde el foco no está en los casos o situaciones misma, sino en los patrones, procedimientos, estructuras, y relaciones entre estos (los cuales, en su momento, se convierten en nuevos objetos, de nivel más alto de razonamiento o comunicación) (p.136).

Kaput (1999) identifica cinco formas de razonamiento algebraico, que se encuentran relacionadas entre sí.

1. Generalización y formalización de patrones.
2. Manipulación de formalismos.
3. El estudio de estructuras abstractas.
4. El estudio de funciones, relaciones, y variación.
5. Modelación de fenómenos.

La actividad de comprender algebra es hacer una red de conexiones de estas cinco formas de razonamiento.

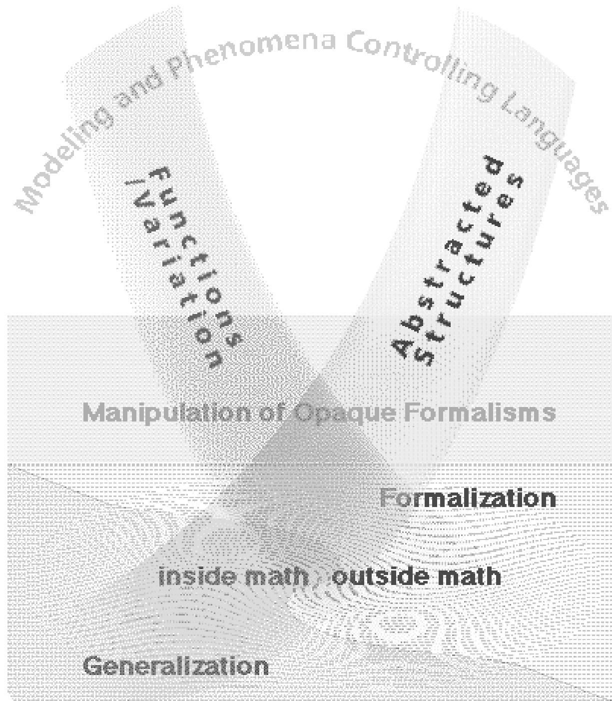


Figura 2.1. Esquema de la Superposición e interrelaciones de las cinco formas de razonamiento algebraico, Kaput (1999).

Se considera que la generalización y formalización son intrínsecas, y son una actividad propia del proceso de matematizar un fenómeno.

2.9. Los conceptos de función lineal y ecuación lineal

Los conceptos de ecuación y función son conceptos matemáticos considerados esenciales en las matemáticas escolares (NCTM, 2000/2003). El concepto de función permite modelar matemáticamente diversos fenómenos, describir situaciones y predecir comportamientos. Algunos autores (Kaput, 1999; NCTM 2000/2003; Reid *et al*, 2012; Michelsen, 2006) señalan que el concepto de función lineal se puede empezar a comprender de manera intuitiva, a partir del análisis de situaciones cercanas al contexto cotidiano del estudiante.

A manera de exposición, algunos libros de matemáticas (Hitt, 2002) no tradicionales, dirigidos a profesores, preceden el tema de “funciones lineales” con un bosquejo histórico sobre el concepto de función y algunas implicaciones didácticas. Hitt (*ibid*) inicia el tema con problemas enunciados en forma verbal, los cuáles analiza, mediante la elaboración de tablas de datos; incluye gráficas y la representación algebraica de la función a que da lugar el problema. Posteriormente, introduce definiciones y las discute a manera de recapitulación. Finalmente hacen una recapitulación en cuanto a la forma que toma una función lineal y las clasificaciones de ésta en términos de su posición en el plano cartesiano.

Los libros de matemáticas tradicionales, generalmente, inician el tema con la definición del concepto, lo describen y clasifican, incluyen ejemplos, ejercicios y enseguida problemas que puedan resolverse con la definición y clasificación establecida. ¿Cuál es la mejor manera de introducir el tema en el salón de clases? De acuerdo con las posturas señaladas en las secciones anteriores de este capítulo ¿cómo debería propiciarse el aprendizaje de este concepto?.

Varios investigadores (Duval, 1999; Hitt, 2002) señalan la importancia del uso de las diferentes representaciones de las funciones lineales en la resolución de los problemas para desarrollar la comprensión del concepto matemático. Hitt (*ibid*) introduce de la manera siguiente el concepto de función después del análisis mediante tablas y gráficas de dos problemas de enunciado verbal (p. 83): “una función es una relación de dependencia entre dos variables, de tal manera, que al dar un valor a una de ellas queda determinado el valor de la otra” y considera que esta definición “intuitiva” puede obtenerse a partir de los ejemplos incluidos en el texto. Posteriormente, explicita otra definición: “una función relaciona una variable independiente con otra dependiente, de tal forma que a cada valor de la primera le corresponde un y sólo un valor de la segunda” (p. 84-85); enseguida define conceptos como dominio, variable dependiente, variable independiente, conjunto imagen y los lleva al contexto de los problemas resueltos. Por ejemplo, define:

> Al conjunto de puntos donde cambia la variable independiente se le denomina *dominio de la función*. Al conjunto de puntos obtenidos a través de la aplicación de la función en la variable independiente se le llama *conjunto imagen*.

Utilizando la terminología anterior con el primer ejemplo, tendríamos que:

- h es la variable independiente,
- V(h) es la variable independiente
- El intervalo $[0,12]$ es el dominio de variación de *h*
- El intervalo $[0,300\pi]$ es el conjunto imagen.

Hitt (*ibid*) continúa con una reflexión de la matemática tratada en los ejemplos relacionados con funciones lineales, es decir, abstrae la forma algebraica de las funciones que han sido utilizadas para resolver los problemas:

> Las funciones lineales son de la forma $f(x)= mx+b$, donde *m* es la pendiente de la recta y *b* es la longitud del cruce con el eje *y* al origen. A continuación mostramos una clasificación de las funciones en términos de su posición en el plano cartesiano (p. 86).

En el libro se analiza $f(x)$ para diferentes valores de m y b, mediante gráficas. Rápidamente se habla de razón entre dos números y su relación con la pendiente m de una recta y la discusión del capítulo termina con los temas de funciones lineales por tramos y la función valor absoluto. Se incluyen ejercicios y problemas.

Es interesante y bastante enriquecedora la discusión que se genera en este texto en torno al concepto de función, función lineal y los conceptos asociados como dominio y conjunto imagen, pero quedan al profesor varios retos: ¿Cómo llevar la discusión al salón de clases? ¿Qué tipo de ambiente generar en el aula? ¿Qué tipo de actividades proponer? ¿Se deben diseñar hojas de trabajo? ¿Qué tipo de hojas de trabajo diseñar? ¿Cómo llevar al aula en el tiempo "reducido", qué se establece por la institución, todas las ideas expuestas en el texto? ¿Qué tanto debe exponer el docente, así como el libro lo hace al inicio de su capítulo? ¿En cuánto tiempo se puede abordar en el aula un material como el que se propone en este texto? ¿Cuántos problemas incluir? ¿Se debe seguir la secuencia que ellos exponen en el capítulo? ¿Cuál es la pertinencia de estas actividades en términos de ciertos objetivos curriculares? Por otra parte, ¿cómo relacionar el concepto de ecuación lineal con el de función lineal? Todas estas preguntas se derivan de una lectura que como docente interesado en llevar a la práctica varias de las reflexiones incluidas en el texto.

El concepto de ecuación lineal se analiza en un capítulo previo al de función lineal, orden similar al de los libros de texto tradicionales. No se explicita, en el capítulo de función lineal, la relación entre estos dos conceptos: función y ecuación lineal. Sin embargo, cuando se establece la definición de ecuación lineal se explicita su relación con una recta de la manera siguiente:

> Una ecuación de la forma $ax+by=k$, con a, b y k constantes reales, se define como una ecuación lineal en las variables x, y.
>
> Observe que $ax+by=k$, es una recta en el plano coordenado R^2 si a o b es diferente de cero y k constante.
>
> También se define una ecuación lineal con tres variables x, y, z, como aquella que puede expresarse en la forma $ax+by+cz=k$ donde a, b, z y k son constantes reales (p. 31).

Se presentan ejemplos de ecuaciones lineales, después el concepto de solución de una ecuación lineal y se dan representaciones gráficas para la comprensión del tema.

El libro de Hitt (*ibid*) hace una aportación diferente de los libros tradicionales en cuanto al tema de función lineal. Sin embargo, no se reflexiona en cuanto a la relación entre los temas de ecuación y función lineal.

El presente trabajo se fundamenta en la resolución de problemas. El alumno se ve inmerso en situaciones problemáticas donde debe aplicar una serie de estrategias tanto cognitivas como metacognitivas. Se busca que al aplicar resolución de problemas en el aula los alumnos sean más participativos y colaborativos en la exposición de sus ideas, desarrollen las habilidades y por consiguiente lleguen a la solución del problema. Se considera una visión del álgebra más rica de aquella enfocada en la memorización de definiciones y algoritmos, se toman ideas de Kaput (1999) en términos de la generalización y búsqueda de patrones, así como de Duval (1999) en términos de los registros de representación y la importancia de transitar de uno a otro para la comprensión de conceptos matemáticos, en particular los de ecuación y función lineal.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología utilizada para el diseño e implementación de la propuesta didáctica y objetivo de esta tesis. Se explican los criterios que se utilizaron para elaborar las actividades. Se describen los participantes, el escenario de instrucción, los elementos que permitieron obtener información respecto al aprendizaje de los estudiantes y la forma como se analizó esta información.

3.1. Metodología de trabajo

La propuesta didáctica[5] que aquí se analiza tomó como base el desarrollo de los saberes y conocimientos implícitos en cuatro de los indicadores de desempeño que se presentan en el bloque VI del programa de estudios de bachillerato relacionados con los conceptos de ecuación y función lineal, así como la relación entre estos, mediante una secuencia de actividades que incluyó el uso de diferentes representaciones: numérica, gráfica y algebraica en un ambiente de trabajo colaborativo de resolución de problemas.

Se consideró pertinente utilizar una metodología con enfoque cualitativo para analizar los resultados de la propuesta didáctica, ya que ésta permite conocer y documentar el proceso de desarrollo de los saberes y conocimientos, en este caso de los estudiantes de bachillerato, al resolver problemas en un ambiente colaborativo de resolución de problemas. En forma particular interesó analizar la forma en que los

[5] Propuesta Didáctica y Secuencia de actividades serán usadas como sinónimos en esta tesis.

estudiantes entienden y desarrollan los conceptos de ecuación y función lineal y los conceptos de asociados: variable, incógnita y solución, apoyados con el uso de diferentes registros de representación como son las tablas, gráficas y simbolismo algebraico. Este análisis permitirá a su vez evaluar la propuesta didáctica.

3.2. Elementos considerados en el diseño de las actividades de la propuesta didáctica

Como ya se mencionó, para el desarrollo de la propuesta didáctica se revisaron los planes y programas de estudios de la RIEMS (ver Tabla 1.1 del Capítulo 1) que forma parte del primer eje del Marco Curricular Común basado en un enfoque de competencias que pertenece al campo disciplinar de matemáticas, donde la asignatura de matemáticas I sugiere que el estudiante utilice distintos procedimientos para representar relaciones entre magnitudes constantes y variables, y para resolver problemas de la vida cotidiana. Sobre todo aquellos relacionados con los conceptos de ecuación y función lineal. A partir de esta revisión y de la concepción que se tiene del álgebra (ver Capítulo 2), se estableció el objetivo de la propuesta y de cada una de las sesiones, los cuales emanan de los cuatro indicadores de desempeño del programa de estudio señalados anteriormente.

Se diseñó una propuesta didáctica con cinco actividades y una evaluación final que incluyó tres problemas cercanos al contexto de los estudiantes y su entorno, como la compra de tortillas, el cobro del número de copias, el ahorro del agua, así como la relación de tiempos y distancias que cubren la necesidad de llegar al aprendizaje de la ecuación y función lineal.

Las actividades se diseñaron tomando en cuenta cuatro indicadores de desempeño del bloque VI Resuelve ecuaciones lineales, donde la importancia es que el alumno desarrolle las competencias para identificar, analizar, representar ecuaciones y funciones lineales y aplicarlas en la solución de problemas de su contexto (se utilizaron los cuatro indicadores mencionados en el Capítulo 1). También, se consideraron los saberes requeridos (conocimientos, habilidades y actitudes) siguientes: el alumno analiza, describe y aplica técnicas para identificar la relación entre funciones y ecuaciones. Formula y soluciona problemas en situaciones que se presentan en su vida cotidiana mediante ecuaciones lineales. Asimismo utiliza las representaciones gráficas y tabulares de las funciones como instrumentos de análisis visual de su comportamiento.

Se diseñaron las actividades considerando algunas dificultades detectadas en el tema de ecuación y función lineal donde se contemplan, además, de los problemas una serie de preguntas que el alumno será capaz de responder de acuerdo al desarrollo de sus habilidades y conocimientos de la ecuación algebraica cuando se le da una gráfica o tabla; o viceversa. También se consideró que el alumno utilizara los conocimientos en cuanto a identificar una incógnita y variable.

Se consideró un tiempo de aplicación para esta propuesta de cuatro sesiones de dos horas haciendo un total de 8 horas y una sesión de dos horas más para la evaluación final. Las actividades se presentan en el anexo A, pero una breve descripción de éstas es la siguiente:

Actividad 1. Las tortillas

Se presentó el problema en lenguaje verbal al estudiante, se le solicitó realizar una tabla con dos columnas, una para la cantidad ***x*** de tortillas y otra para la cantidad a pagar por esa ***x*** cantidad de kilos de tortillas y así analizar la forma en que se modifica la cantidad a pagar. Los conceptos matemáticos subyacentes fueron el de variación, el de dependencia funcional y ecuación lineal. Se pretendió la aplicación de los conocimientos previos como: el llenado de los datos en la tabla, operaciones básicas y despejes.

El objetivo fue que el alumno mediante el llenado de una tabla con procedimientos conocidos resolviera el problema y lo relacionara con las ecuaciones de la forma $ax = b$ y $ax + b = c$. La actividad se aplicó en una sesión de 2 horas.

Actividad 2. Fotocopia de un tríptico

Se describe en forma verbal una actividad donde se realiza el fotocopiado de un tríptico. Se presentó en una columna de una tabla el número de copias a fotocopiar (anexo A), se pidió en otra columna el costo por sacar cierta cantidad de copias, el cual se abordó mediante la ecuación de la forma $ax + b = c$. Se diseñaron cinco preguntas para analizar y modelar la ecuación lineal en una variable, que permitiera obtener cada valor de las columnas, apoyándose de la representación de la tabla y gráfica de la función lineal, ya que la expresión algebraica se les proporcionó. Se realizó el cálculo de las operaciones básicas, la solución y ecuación lineal del problema.

El objetivo fue que el alumno, a través de las tablas utiliza procedimientos al resolver el problema que se puede plantear con una ecuación de la forma $ax + b = c$. La actividad se aplicó en una sesión de 2 horas.

Actividad 3. Suministro de agua por día

Se planteó en forma verbal y gráfica el problema, el cuál trataba sobre el suministro de agua por día (litros/horas) en una cisterna de una unidad habitacional. Se proporcionaron tres gráficas de cada cisterna por día, y se pidió a los estudiantes que analizaran la situación en cada uno de los días. Ellos debían representar la situación en forma algebraica mediante una ecuación lineal que les permitiera conocer la situación en cada momento. La ecuación a representar era de la forma $ax + b = c$.

Actividad 4. Caminata de Ernesto

Descripción. Se plantea en forma verbal la situación y se describe mediante una gráfica, donde se observa la representación de la relación entre tiempo y distancia recorrida por Ernesto. Se solicitó el llenado de los valores faltantes de la tabla (distancia/tiempo) y posteriormente la representación de la situación mediante una expresión algebraica de la ecuación lineal.

El objetivo de la actividad 3 y 4 fue que el alumno a través de las gráficas analizara e interpretara las relaciones entre las variables presentadas y utilizaran procedimientos para resolver el problema como el llenado de tablas, el cual pudiera propiciar el planteamiento de una ecuación de la forma $ax + b = c$. La actividad 3 y 4 se aplicó cada una en dos sesiones de 2 horas.

Actividad 5. Precio de un artículo.

Se presenta al alumno la gráfica de una función lineal (variación del precio de un artículo por mes). Se busca el tránsito de la gráfica de la función lineal a la ecuación lineal y solucionar diversas situaciones de los parámetros *m* y *b*.

El objetivo fue que el alumno obtuviera a partir de la gráfica de una función lineal la ecuación lineal que modela la situación del fenómeno y discutiera y comprendiera los conceptos de inclinación o pendiente de la recta. La actividad se aplicó cada una sesión de 2 horas.

3.3. Participantes

Para implementar la propuesta didáctica se eligió un grupo de 27 alumnos. El total de alumnos inscritos en el primer semestre en el Colegio de Bachilleres plantel Carlos Alberto Madrazo Becerra de la comunidad de Carlos A. Madrazo del municipio de Othón P. Blanco era de 100. Los alumnos elegidos, no eran sobresalientes de acuerdo con las calificaciones que obtuvieron en los cinco primeros bloques de un total de diez.

Los estudiantes del grupo elegido se caracterizaban por ser alumnos repetidores, con debilidades en el manejo de álgebra y aritmética; y un rechazo para trabajar de manera grupal. Las edades de los estudiantes oscilaban entre 15 y 16 años.

3.4. Escenario de instrucción

Durante la implementación de la propuesta se utilizaron estrategias didácticas relacionadas con la resolución de problemas: trabajo individual, trabajo colaborativo en grupos de tres estudiantes y trabajo grupal. Los estudiantes podían comunicarse entre ellos, argumentar, tomar decisiones, describir, etc. Los estudiantes trabajaron con las herramientas de lápiz y papel; aunque algunos estudiantes hicieron uso de su calculadora. No fue el propósito de esta propuesta estructurarse para el uso de tecnología.

Cada una de las sesiones se llevó a cabo en tres fases: apertura, desarrollo y cierre; y en cada una de ellas se estableció un tiempo estimado para la implementación de las actividades (anexo A). Asimismo, cada problema se enumeró como actividad siendo un total de cinco. Se solicitaron tareas extraclase para verificar si los conocimientos y las habilidades que se propiciaron en las sesiones se mantenían. Cabe mencionar que las características que tienen los problemas diseñados para la evaluación son similares a los presentados en la secuencia de actividades.

3.4.1. El papel del profesor

Con el propósito de que el estudiante desarrollara las competencias matemáticas disciplinares relacionadas con el tema de función y ecuación lineal, se buscó vincular los conocimientos previos con los deseados. Se organizó por equipos a los alumnos y se propició un clima favorable, afectivo; asimismo, se promovió confianza, seguridad, autoestima e interés al proponer contextos actuales y significativos que fueron guía para el desarrollo de conocimiento y aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana. Se fomentó la consulta e investigación en los libros de texto con el propósito de lograr un aprendizaje en el estudiante.

El docente coordinó las actividades planteadas por equipos así como la presentación de los resultados de las actividades de cada una de las sesiones, ofreciendo una diversidad de interacciones entre ellos. Favoreció el trabajo colectivo, recurriendo a actividades variadas que estimularan participación activa en clase. Condujo las situaciones de aprendizaje bajo un marco de respeto a la diferencia y promoción de los valores cívicos y éticos. Diseñó instrumentos de evaluación del aprendizaje, considerando los niveles de desarrollo del grupo.

3.5. Elementos que permitieron obtener información o recolectar datos respecto al aprendizaje de los estudiantes

Para obtener la información respecto al aprendizaje de los estudiantes, el docente recogió las hojas de trabajo de los equipos, llevó una bitácora con las observaciones del proceso seguido en el aula y diseñó un instrumento de evaluación final para su aplicación al término de la implementación de la propuesta, el cual brindó información del avance individual de los estudiantes.

El análisis del desempeño de los estudiantes ante este instrumento más el análisis del desempeño en cada una de las actividades da una comprensión global del proceso de aprendizaje de los estudiantes.

3.6. Elementos de análisis

Las categorías que se utilizaron en los estudiantes para analizar el proceso de desarrollo de conocimiento matemático, fueron las que a continuación se mencionan. Éstas se fundamentan en los aportes de Duval (1999) en términos de la importancia de las representaciones y la transición de los estudiantes entre éstas para lograr la comprensión de conceptos matemáticos.

1. De la representación ***tabular a la representación simbólica***. El énfasis estuvo en la identificación de datos, incógnitas y patrones de comportamiento en la tabla de valores. La relación entre datos e incógnitas, el concepto de solución y su relación con la escritura simbólica de relaciones.

2. De la representación ***tabular a la representación gráfica***. El énfasis estuvo en la identificación de variables, patrones de comportamiento e incógnitas en la tabla de valores, el concepto de variable y su relación con la escritura simbólica de relaciones**.**

3. De la representación ***gráfica a la representación tabular y simbólica***. Identificación de datos y su patrón de comportamiento en la gráfica. La relación de este patrón con la escritura simbólica de relaciones.

4. De la representación ***simbólica a la representación tabular y gráfica***. Identificación de datos, incógnitas y relación entre estos en forma simbólica y su representación en los registros tabular y gráfico.

En cada una de las categorías anteriores, los conceptos de variable, incógnita y solución están presentes y son esenciales para el reconocimiento de patrones, el proceso de generalización, y por lo tanto, la simbolización algebraica. La representación gráfica permite a los estudiantes dar sentido a la relación entre variables, dar sentido al concepto de función, establecer su relación con el concepto de ecuación y los conceptos de incógnita y solución. Por su parte, la representación tabular también permite a los estudiantes comprender los conceptos de variable, incógnita y solución. En la medida que los estudiantes pueden transitar de un registro a otro, así como moverse en el mismo registro, los estudiantes muestran comprensión de los conceptos matemáticos involucrados. Un registro que siempre estuvo presente fue el verbal. Éste no está dentro de las categorías de análisis debido a que estuvo acompañado de otros registros.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados de la implementación de la propuesta didáctica en el aula, y por lo tanto, del desarrollo de conocimiento por parte de los estudiantes. Se documenta el proceso de aprendizaje, mediante el análisis y descripción de los procedimientos emprendidos por los estudiantes al resolver cada una de las actividades y mediante el análisis de los resultados derivados de la implementación del instrumento final de evaluación. Se presentan las dificultades y logros de aprendizaje de los estudiantes, así como, el papel del profesor para apoyar el desarrollo del conocimiento. Se inicia con una breve discusión respecto a los resultados obtenidos a partir de la prueba piloto.

4.1. Resultados de la prueba piloto

La propuesta didáctica fue implementada en fase piloto con el propósito de detectar si la redacción de los problemas, con sus respectivas preguntas era clara, sí los problemas se relacionaban con el contexto de los estudiantes; y para determinar el nivel de complejidad de cada pregunta y el tiempo asignado a cada actividad.

Esta fase piloto se implementó en el Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo en el Plantel de Carlos A. Madrazo del municipio de Othón P. Blanco donde se seleccionaron a seis estudiantes entre 15 y 16 años. Los estudiantes habían obtenido calificaciones altas, medias y bajas en el bloque VI de la asignatura de matemáticas del periodo 2010-B, cursada en el primer semestre. Las características de este grupo fueron, por lo tanto, no homogéneas de acuerdo con los promedios, y situación económica, ya que son alumnos que provienen de comunidades rurales, egresados de escuelas Telesecundarias.

Con base en los resultados obtenidos en la fase piloto se realizaron modificaciones a la actividad de la sesión 1 (quedando como se muestra en el anexo A). En particular, se agregaron datos numéricos a la tabla porque no se habían contemplado cantidades fraccionarias, lo cual también es factible en el contexto real de la compra de tortillas. Asimismo, se anexó otro inciso donde aparecieron cantidades fraccionarias, en este inciso el alumno debía realizar un despeje de "y".

A las actividades de las sesiones 2 y 3 no se les realizó ningún cambio. A la actividad de la sesión 4, se le modifico la gráfica y el inciso *e*. Se le anexaron los incisos *a*, *d* y *f*. Con estas modificaciones se volvió a implementar la propuesta didáctica, pero ahora a un grupo normal de estudiantes de bachillerato.

4.2. Resultados, análisis y discusión de las actividades de la propuesta didáctica

El objetivo de la propuesta didáctica, como ya se mencionó fue apoyar la comprensión de los estudiantes de bachillerato, en la aplicación de los conceptos de ecuación y función lineal, así como la relación entre estos mediante el uso de diferentes representaciones como: tabla, gráfica y expresión algebraica. La resolución de problemas fue el contexto en el cual los estudiantes trabajaron en el aula.

La propuesta didáctica se llevó a cabo en 4 sesiones, cada una de dos horas. El análisis de la implementación de la propuesta se presenta sesión por sesión. El desarrollo de conocimiento de los estudiantes se explica a partir del análisis del trabajo en equipo y el trabajo grupal para resolver las actividades a lo largo de cada sesión.

4.2.1. Sesión 1

Durante la sesión 1, los alumnos resolvieron la actividad 1 (Figura 4.1). Para ello necesitaron lápiz, borrador, reglas, calculadora, hojas milimétricas, y colores para realizar el llenado de la tabla, elaborar la gráfica y plantear la ecuación. El objetivo de la sesión 1 fue: Que el alumno a través de las tabla resolviera el problema, y los relacionara con las ecuaciones de la forma $ax = b$ y $ax + b = c$.

En un tiempo de dos horas con diez minutos se trabajó en la actividad 1. La descripción y análisis del desarrollo de esta primera sesión la subdividimos en ciclos o tipos de procedimientos emprendidos por los estudiantes, los cuales marcamos como a continuación se muestra (con los apartados 4.2.1.1, 4.2.1.2 y 4.2.1.3).

4.2.1.1. De la representación tabular a la representación simbólica. Identificación de datos, incógnitas y patrones de comportamiento. La relación entre datos e incógnitas, el concepto de solución y su relación con la escritura simbólica de relaciones

El profesor inició la sesión con instrucciones para formar 8 equipos de tres integrantes cada uno. Posteriormente, repartió las hojas con la actividad y enseguida la leyó junto con el grupo. El profesor preguntó si era clara la actividad, a lo que los alumnos respondieron de manera afirmativa; en equipo dieron inicio al proceso de resolución.

Los equipos empezaron a cuestionarse sobre los procedimientos para el llenado de la tabla correspondiente a la actividad 1 (Figura 4.1), procedieron a identificar las incógnitas, datos y relaciones entre éstos (cantidad de kilos de tortillas, el precio a pagar y la relación subyacente), con esta información hicieron las operaciones correspondientes para el llenado de la tabla. Cada uno de los equipos externó sus ideas y puntos de vista, en cuanto a cómo podía proceder para resolver la actividad. Por ejemplo, los estudiantes expresaron: “vamos a multiplicar 12 por el valor del kilo de tortillas “y “si 12 vale un kilo de tortilla, entonces medio kilo vale 6”.

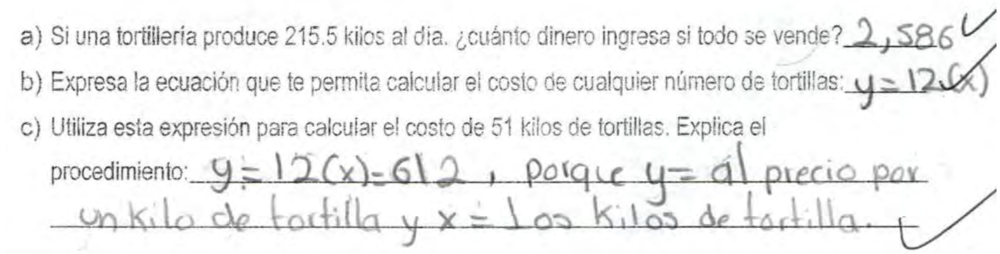
Actividad 1.

En equipo, realiza una tabla en donde coloques el precio a pagar por **x** kilos de tortillas y veas cuanto crece la cantidad a pagar, cuando crecen los kilos comprados; grafica los datos y resuelve las preguntas. Considera que el kilo cuesta 12 pesos.

Kilo de tortillas	Precio a Pagar
¾	9
2	24
3 ½	42
5	60
7.5	90
8 ¾	105
17	204
25.5	306

Figura 4.1. Resultados del llenado de la tabla de la actividad 1.

Seis equipos de ocho (equipos 2, 3, 5, 6, 7 y 8) se pusieron de acuerdo sobre el llenado de la tabla y cómo multiplicar fracciones y decimales; cuatro de estos seis equipos (equipos 2, 3, 5, y 8) contestaron las siguientes tres preguntas de la actividad 1 (Figura 4.2), conforme fueron llenando la tabla, debido a que las respuestas se remitían al uso de datos (resultados obtenidos previamente) de la tabla o implicaban operaciones similares a las realizadas para el llenado de la tabla. Estos equipos se apoyaron en el uso de calculadoras para resolver estas tres preguntas y comparar sus resultados.



a) Si una tortillería produce 215.5 kilos al día. ¿cuánto dinero ingresa si todo se vende? 2,586

b) Expresa la ecuación que te permita calcular el costo de cualquier número de tortillas: y = 12(x)

c) Utiliza esta expresión para calcular el costo de 51 kilos de tortillas. Explica el procedimiento: y = 12(x) = 612 , porque y = al precio por un kilo de tortilla y x = los kilos de tortilla.

Figura 4.2. Respuestas de las tres primeras preguntas de la actividad 1.

Estos cuatro equipos identificaron el patrón de comportamiento de las operaciones que les permitía llenar la tabla, lo cual los llevó a escribir la ecuación $y = 12\ x$ (Figura 4.2, inciso *b*); donde el kilo de tortilla fue de 12 pesos.

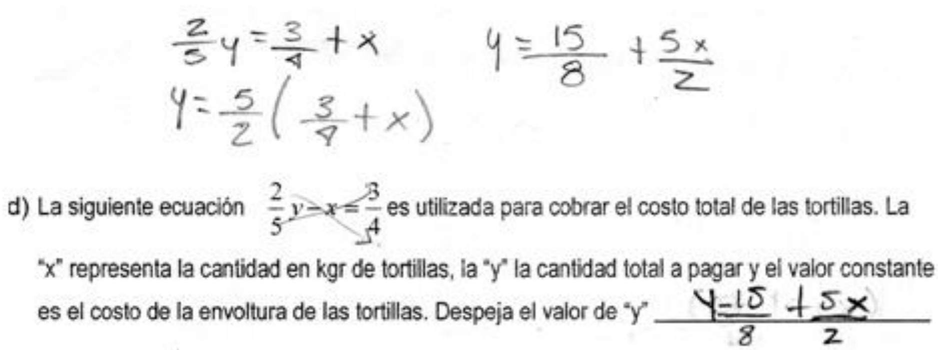
Los equipos 1, 4, 6 y 7 (4 equipos de 8), por su parte, al llenar la tabla observaron y dijeron que era “la tabla del doce”. Identificaron qué tipo de operaciones debían realizar, es decir, cuál era el patrón numérico subyacente al llenado de la tabla, no supieron cómo expresar la relación simbólica que les permitiera calcular el costo de cualquier número de tortillas. Expresaron la relación con cantidades numéricas y no con una ecuación (Figura 4.3).

b) Expresa la ecuación que te permita calcular el costo de cualquier número de tortillas: $2 \times 12 = 24$

Figura 4.3. Falta de simbolización algebraica del patrón de comportamiento.

4.2.1.2. La representación simbólica, manipulación algebraica, significado de ecuación y función

El inciso *d* fue el más difícil de responder para el grupo en general. Los estudiantes manifestaron dudas respecto al despeje de la relación funcional $\frac{2}{5}y - x = \frac{3}{4}$. Por ejemplo: el equipo 3 (Figura 4.4) aplicó incorrectamente el despeje para darle la solución correcta al ejercicio.



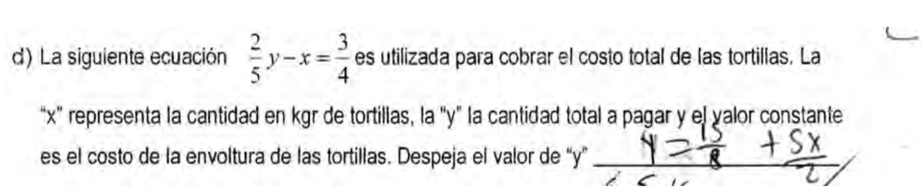
$\frac{2}{5}y = \frac{3}{4} + x$ $\quad y = \frac{15}{8} + \frac{5x}{2}$

$y = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{4} + x\right)$

d) La siguiente ecuación $\frac{2}{5}y - x = \frac{3}{4}$ es utilizada para cobrar el costo total de las tortillas. La "x" representa la cantidad en kgr de tortillas, la "y" la cantidad total a pagar y el valor constante es el costo de la envoltura de las tortillas. Despeja el valor de "y" $y = \frac{15}{8} + \frac{5x}{2}$

Figura 4.4. Desarrollo del inciso *d*.

Solo tres equipos de ocho lograron despejar sin ningún problema. Los equipos 8 y 2 aplicaron la estrategia de dividir cada término para obtener el resultado (Figura 4.5).



d) La siguiente ecuación $\frac{2}{5}y - x = \frac{3}{4}$ es utilizada para cobrar el costo total de las tortillas. La "x" representa la cantidad en kgr de tortillas, la "y" la cantidad total a pagar y el valor constante es el costo de la envoltura de las tortillas. Despeja el valor de "y" $y = \frac{15}{8} + \frac{5x}{2}$

Figura 4.5. Procedimiento del equipo 2.

Es importante mencionar que la manera como se introdujo esta última actividad fue un poco desconcertante para los estudiantes, quienes la vieron como una actividad aislada del resto. Por lo tanto, el profesor los indujo a recordar el tema de fracciones y despejes. Seguidamente, el profesor intervino para realizar la explicación y monitorear el desarrollo de las ecuaciones, retroalimentando los despejes de las incógnitas a despejar, asimismo la importancia de comprender, analizar la relación que existe en los datos y las variables e incógnitas para solucionar problemas de contexto como el trabajado en clase.

4.2.1.3. La representación gráfica

Dado que el tiempo lo permitió y como una actividad para redondear la comprensión de la situación y conceptos, el profesor solicitó a los estudiantes que realizarán la gráfica de acuerdo a los resultados obtenidos en la tabla. Es importante mencionar que al hacer la gráfica se pueda tener una representación más del problema que permitiera analizar la situación propuesta en la actividad 1. Además, se maneja una representación matemática más, asociada a los conceptos de función y ecuación lineal y los conceptos relacionados.

Cabe mencionar que en la tabla se aprecian los datos del número de kilos de tortilla y el precio a pagar. Se creía que los alumnos, además, tenían elementos para realizar el trazo de la gráfica en el plano cartesiano. Los equipos 1, 2, 3, 6 y 8 no tuvieron ninguna dificultad, sin embargo, los equipos 4, 5 y 7 tuvieron dificultades para ubicar los puntos en el plano cartesiano de acuerdo con los datos de la tabla y al elegir las escalas.

4.2.1.4. Observaciones

En resumen los estudiantes mostraron comprensión de la actividad al identificar datos, incógnitas y la relación entre estas. Esto se observó en el rápido llenado de la tabla una vez que identificaron el patrón de comportamiento y, por lo tanto, las relaciones entre las cantidades contenidas en la actividad. Sin embargo, no fue tan sencillo para todos los equipos escribir este patrón en forma simbólica.

No se observó una total comprensión de la relación simbólica, pues el 62.5 % de los estudiantes no pudo utilizarla para realizar todos los cálculos. Se observó, por otra parte, que los estudiantes no siempre pudieron manipularla algebraicamente, lo cual evidenció que hay dificultades con el manejo de fracciones además de falta de comprensión de las relaciones simbólicas. A continuación se presenta los conceptos que los equipos pudieron comprender durante la transición de:

Tabla 4.1. Resumen del conocimiento adquirido por los equipos.

Tabla $\longrightarrow$ Ecuación

Equipos	Perfiles
2,3,5, 6 y 8	Detectaron el patrón de comportamiento, identificaron variables y escribieron las relaciones funcionales de manera correcta, simbolizaron de manera algebraica determinando las cantidades numéricas de tortillas.
1,4,6 y 7	Detectaron el patrón de comportamiento, simbolizaron de manera algebraica, pero no pudieron utilizar la expresión algebraica para calcular el costo de cualquier kilo de tortillas.

Lo anterior pudo observarse hasta antes de la intervención del profesor con una actividad grupal, la cuál fue generada con el propósito de retroalimentar la sesión. El profesor realizó una explicación de los conceptos que se plantearon en las preguntas de la actividad, con el fin de que los alumnos realizaran las modificaciones pertinentes y de está manera apoyó para que todos los estudiantes efectivamente lograrán comprender la relación entre los datos y la relacionaran con la identificación de patrones de comportamiento subyacentes en la tabla. Esto permitió que de nuevo hubiera interacciones entre los integrantes de los equipos, quienes replantearon las respuestas o en su caso modificaron sus estrategias para llegar a la solución.

4.2.2. Sesión 2

Para la actividad de la sesión 2 (Figura 4.6) los alumnos necesitaron lápiz, borrador, reglas, calculadora, hojas milimétricas y colores. El objetivo de esta sesión fue que el alumno a través de la tabla comprendiera una ecuación de la forma $ax + b = c$.

En un tiempo de dos horas con diez minutos se trabajó en la actividad. El profesor, antes de dar inicio con la sesión 2 realizó una breve retroalimentación de la sesión 1, con el propósito de que los estudiantes visualizarán la utilidad de una expresión algebraica de la ecuación lineal para describir la relación entre las incógnitas o variables de un problema (en este caso, entre la cantidad de dinero a pagar de acuerdo con la cantidad de kilos de tortilla por consumir) y su potencial para obtener cualquier dato en una tabla dada. La descripción y análisis del desarrollo de esta sesión la subdividimos en ciclos de comprensión (ilustrados por el manejo de los registros de representaciones utilizados) o tipos de procedimientos emprendidos por los estudiantes, los cuales marcamos como a continuación se muestra (con los apartados 4.2.2.1, y 4.2.2.2).

4.2.2.1. De la representación tabular a la representación gráfica. Identificación de variables, patrones de comportamiento e incógnita en la tabla de valores. El concepto de variable y su relación con la escritura simbólica de relaciones

El profesor repartió las hojas con la actividad a los equipos, integrados en la sesión anterior. Enseguida los estudiantes, leyeron, comentaron y analizaron la tabla. El profesor intervino preguntando si la actividad era clara, a lo que los alumnos respondieron de manera afirmativa. En equipos dieron inicio al proceso de resolución.

Los equipos empezaron a dudar sobre los procedimientos del llenado de la tabla (Figura 4.6), sin embargo, procedieron a identificar las incógnitas, datos y relaciones entre éstos (números de copias, el costo de pesos de las fotocopias y la relación subyacente) con esta información hicieron operaciones para el llenado de la tabla.

Los equipos de manera simultánea al llenado de la tabla externaron ideas y puntos de vista, en cuanto a cómo resolver la actividad. Por ejemplo, expresaron: "que en la tabla se visualiza los valores de la variable x el número de copias y los costos es la y; por lo que para hallar la solución de y se tenía que realizar la sustitución en la ecuación para encontrar los resultados". Mencionaron que esta actividad era similar a la de la sesión uno. El secretario de los equipos leyó en una o varias ocasiones la actividad, algunos integrantes de cada equipo tomaron nota, otros solicitaron que les repitieran las preguntas, por ejemplo de los incisos *a* y *c* (Figura 4.7).

Actividad 2.

1. Gleysi la encargada del fotocopiado de la papelería "Candy" desea elaborar una tabla para agilizar el cobro del número de copias de un tríptico que se vende a los alumnos. Ella sabe que el costo de las fotocopias depende del número de hojas, es decir: por 10 copias se cobran \$21.00, por 20, \$ 41.00, etc.

La encargada también sabe que por cada 10 copias el aumento es de \$ 20.00, esto significa que cada copia cuesta \$ 2.00. Pero, ¿por qué las primeras 10 fotocopias cuestan \$21.00? Porque el tríptico del cual se derivan las copias cuesta \$ 1.00. Por lo tanto, el costo de 10 fotocopias es de: 2(10) =\$ 20.00. Más \$ 1.00 de gasto inicial: 20 + 1 = \$ 21.00

En la tabla de la derecha indica el costo en pesos de las fotocopias y **x** el número de fotocopias.

Número de Copias (x)	**Desarrollo y =2x + 1**	**Costos Y**
10	2(10)+1	21
20	2(20)+1	41
30	2(30)+1	61
40	2(40)+1	81
50	2(50)+1	101
60	2(60)+1	121
100	2(100)+1	201
120	2(120)+1	241
160	2(160)+1	321
200	2(200)+1	401

Figura 4.6. Resultados del llenado de la tabla actividad 2.

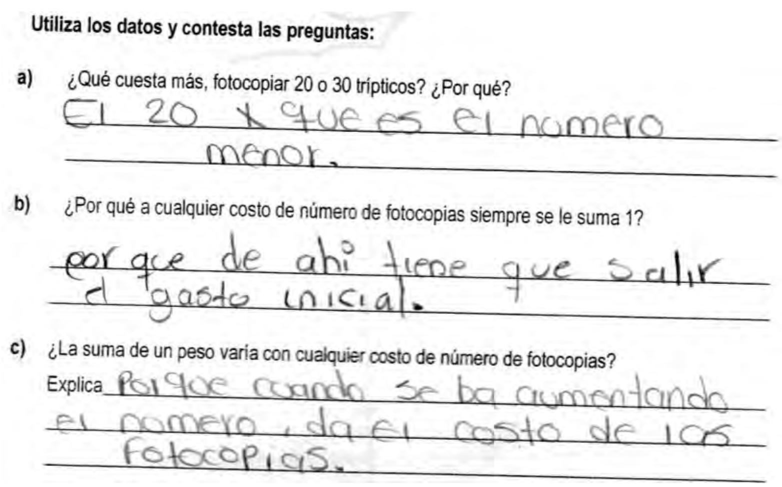
Seis equipos de ocho (equipos 2, 3, 5, 6, 7 y 8) acordaron cómo encontrar las cantidades solicitadas en la tabla, usando para ello los valores de la columna de la *x*. Estos equipos se apoyaron en el uso de calculadoras para encontrar los resultados. Cabe mencionar que se propició un intercambio de ideas entre los estudiantes y se observó trabajo colaborativo en cada equipo. Por ejemplo, los estudiantes se apoyaron entre ellos para manejar de manera adecuada la calculadora y realizar los cálculos. Esta interacción se volvió mucho mayor cuando el profesor intervino para propiciar una discusión en torno a los resultados que se estaban obteniendo. Existió una mayor participación de los estudiantes cuando los representantes de los equipos presentaron sus resultados de la tabla, lo que ocasionó una comparación de resultados.

Dos equipos de los ocho (equipos 1 y 4) consultaron al profesor preguntándole si “el desarrollo de la sustitución de valores de x en la ecuación $y = 2x +1$ deberían de escribirla en la columna del desarrollo y/o en la columna de los costos y”.

Posteriormente, los equipos contestaron las preguntas de la actividad (Figura 4.7), incisos *a*, *b* y *c*. En el inciso *a* preguntaron “por qué en el total de copias existe una diferencia de un peso cuando debería ser doble”, por ejemplo: “para 20 trípticos es 41 pesos y para 40 es 81”. Ellos consideraban que debería ser 82 en lugar de 81 pesos. Dos equipos (equipos 7 y 8) preguntaron al profesor acerca del inciso *b* “¿Por qué a cualquier costo de número de fotocopias siempre se le suma 1?”. Ante esta pregunta el profesor observó que los estudiantes no comprendieron el problema y solicitó que se leyera de nuevo el enunciado de éste e intervino mencionado que “un peso” es el gasto inicial de las copias. El profesor realizó el monitoreo de la actividad, continuó escuchando las ideas y comentarios de los alumnos en cada uno de los equipos quienes iban comprendiendo cada vez mejor la actividad y resolviendo el ejercicio en su totalidad.

En cuanto al inciso *c*, cinco equipos (equipos 1, 2, 5, 4 y 6) tuvieron dificultad para contestarlo ya que al externar sus ideas no llegaban a un consenso en relación a que la suma de “un peso” se conservaba en cualquier costo del número de copias. Por ejemplo, tuvieron dificultad para detectar que 30 copias cuestan más que 20. Mencionaron que 20 cuesta más porque cada tríptico cuesta 2.05 y en 30 cuesta 2.03.

El profesor tuvo que proponer más ejemplos, usó para ello la compra de naranjas, prendedores, pulseras, etc. Subrayó la importancia de identificar relaciones y comportamientos que existen entre las variables, con el propósito de obtener respuestas a ciertas preguntas. La discusión con el profesor permitió que los estudiantes tuvieran una mejor comprensión de la actividad 2 planteada y que lograran responder de manera correcta los incisos.



Utiliza los datos y contesta las preguntas:

a) ¿Qué cuesta más, fotocopiar 20 o 30 trípticos? ¿Por qué?

El 20 x que es el nomero menor.

b) ¿Por qué a cualquier costo de número de fotocopias siempre se le suma 1?

porqce de ahi tiene que salir el gasto inicial.

c) ¿La suma de un peso varía con cualquier costo de número de fotocopias?

Explica Porqoe cuando se ba aumentando el nomero, da el costo de los fotocopias.

Figura 4.7. Respuestas de los tres primeros incisos.

En cuanto al inciso *d*, siete equipos de ocho (equipos 1, 2, 3, 4, 6, 7 y 8) comprendieron el patrón de comportamiento de las operaciones que les permitía llenar la tabla, lo cual los llevo a identificar la relación $y = 2x + 1$ con los datos de la tabla y las relaciones entre estos, donde el número de copias tiene un costo en pesos. Sin embargo, el equipo 5, a pesar de que logró identificar el tipo de operaciones que debía realizar, es decir, el patrón numérico subyacente al llenado de la tabla, no supo cómo expresar la ecuación lineal que le permitiera calcular el costo de cualquier número de copias inciso *d* (Figura 4.8). Cabe señalar que esta ecuación aparecía en la tabla (Figura 4.6).

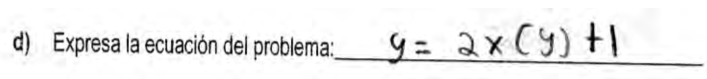

d) Expresa la ecuación del problema: $y = 2x(y)+1$

Figura 4.8. Respuesta del inciso *d*.

4.2.2.2. La representación gráfica

El profesor solicitó a los estudiantes que realizaran la gráfica correspondiente a la función del inciso *d*, de acuerdo con los resultados obtenidos en la tabla, el objetivo era tener una representación diferente a la tabular y simbólica, que permitiera profundizar en la comprensión de la situación propuesta, los conceptos de ecuación y función lineal y los conceptos relacionados.

Cabe mencionar que en la tabla se aprecian los datos del número de copias y el costo a pagar. Los alumnos tenían elementos para poder realizar el trazo de la gráfica en el plano cartesiano. El equipo 2 no tuvo ninguna dificultad para plasmar el trazo de la gráfica en el plano cartesiano (Figura 4.9). Sin embargo, los otros siete (equipos 1, 3, 4, 5, 6, 7 y 8) tuvieron dificultad para ubicar los datos en los ejes *x* e *y* al elegir la escala del número de copias y costos, lo que ocasiono que al unir los puntos del trazo no se visualizara una línea recta. Se observó, por ejemplo, debilidad en el manejo de la escala para asignar los valores en los ejes coordenados.

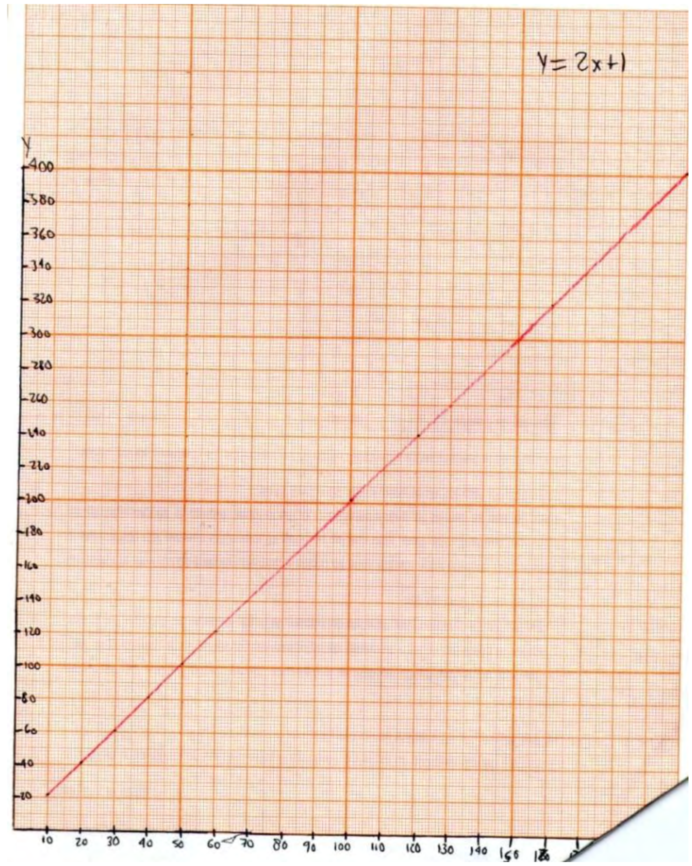


Figura 4.9. Trazo de la gráfica de la actividad, realizada por el equipo 2.

4.2.2. Observaciones

En resumen los estudiantes identificaron los datos, incógnitas y relación entre éstas. Esto se observó en el rápido llenado de la tabla una vez que identificaron el patrón de comportamiento y, por lo tanto, las relaciones entre las cantidades contenidas en la actividad. Sin embargo, durante este proceso, algunos equipos tuvieron dificultades para identificar y comprender la relación entre el patrón identificado y la expresión simbólica de éste, a pesar de que estaba explícita en la tabla (Figura 4.6).

Debido a la interacción continua y las discusiones con el profesor, varios estudiantes durante el proceso de solución y algunos sólo hasta el final de la sesión mostraron comprensión de la actividad 2. Desarrollaron operaciones, dada la ecuación para llegar al costo de las fotocopias. Visualizaron que la suma de un peso al número de copias es el gasto (costo) inicial de fotocopias. Identificaron patrones, comprendieron la ecuación $ax+b=c$ y llegaron a encontrar respuestas a preguntas específicas planteadas. Sustituyeron los valores de x en la ecuación presentada. Dibujaron el plano cartesiano ubicando los ejes "x" y "y", y graficaron para visualizar la línea recta de acuerdo a la tabla de valores. De acuerdo con el objetivo planteado para la actividad 2 se observa que los estudiantes lograron comprender la relación entre los datos e identificaron el patrón de comportamiento subyacente.

Tabla 4.2. Resumen del conocimiento adquirido por los equipos.

Tabla $\longrightarrow$ Gráfica

Equipos	**Perfil**
2 y 3	Detectaron patrón de comportamiento, simbolizaron de manera algebraica y representaron la gráfica así como el trazo de la línea recta.
1,4,5, 6,7 y 8	Detectaron patrón de comportamiento, no visualizaron los valores de las escalas de cada uno de los ejes por lo que al unir los puntos no obtuvieron una línea recta.

Es importante mencionar que al final de la sesión el profesor realizó de manera grupal una explicación de los conceptos con el propósito de retroalimentar la sesión. Los alumnos realizaron las modificaciones pertinentes y de esta manera se apoyó de nuevo la comprensión de la relación entre los datos, del patrón de comportamiento subyacente a la tabla, así como de apoyar el desarrollo de sus habilidades para la elaboración de la gráfica correspondiente.

4.2.3. Sesión 3

Los alumnos necesitaron lápiz, borrador, reglas, calculadora, hojas milimétricas, colores para realizar el llenado de la tabla y plantear las relaciones simbólicas de la sesión 3. El objetivo de la sesión 3 fue que el alumno a través de las gráficas analizará e interpretará las relaciones entre las variables presentadas y utilizará procedimientos para resolver el problema relacionado con el planteamiento de una ecuación de la forma $ax+b=c$, con la función lineal a partir de la identificación de variables.

En un tiempo de 4 horas con diez minutos se trabajaron las actividades 3 y 4, ya que cada actividad se realizó en dos horas. La descripción y análisis del desarrollo de esta sesión, compuesta por dos actividades, la subdividimos en ciclos de comprensión (ilustrados por el manejo de los registros de representaciones utilizados) o tipos de procedimientos emprendidos por los estudiantes, los cuales marcamos como a continuación se muestra (con el apartado 4.2.3.1).

El profesor antes de dar inicio con las actividades propuestas para la sesión 3 realizó una breve retroalimentación de la sesión 2 con el propósito de que los estudiantes relacionaran las gráficas con la expresión algebraica de la función lineal y observaran la relación existente entre las variables: número de horas y la cantidad de litros para el llenado de la cisterna, y de manera simultánea o consecutiva proceder a contestar las preguntas, parte de la actividad.

4.2.3.1. De la representación gráfica a la representación simbólica. Identificación de datos y patrones de comportamiento en la gráfica. La relación de este patrón con la escritura simbólica de relaciones

El profesor inició la sesión solicitando la conformación de los 8 equipos que habían venido trabajando de manera continua las sesiones anteriores. Posteriormente repartió las hojas con las actividades y enseguida las leyó junto con el grupo. Después de comentar la actividad, los equipos dieron inicio al proceso de resolución.

Los equipos empezaron a revisar la gráfica con el propósito de contestar las preguntas correspondientes a la actividad 3 (Figura 4.10), identificaron el número de horas y la cantidad de litros en la cisterna; con esta información sacaron los resultados para contestar seguidamente las preguntas. Cada uno de los equipos externaron sus ideas y sus puntos de vista, en cuanto a cómo resolver la actividad. Por ejemplo expresaron: "Que cada gráfica representa un día", " en las gráficas se visualiza el eje *y* (agua de la cisterna en litros) y el eje de las *x* (horas)", "existe una relación entre el llenado de la cisterna y el número de horas" y por último "la intersección con el eje en relación al día 1 es el único día que inicia con 50 litros de agua en la cisterna"; y observaron que 2 en los días 2 y 3 la gráfica de la línea recta pasa por el origen de coordenadas, esto lo interpretaron como: la cisterna en éstos días no cuenta con agua".

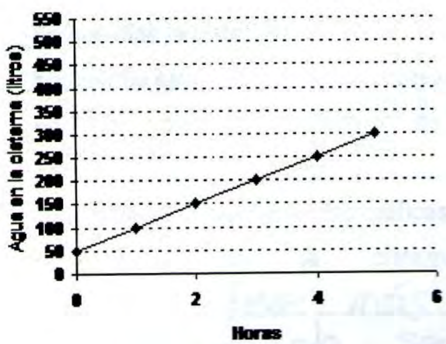
Sesión 3: 4 hrs.

OBJETIVO DE LA SESIÓN: El alumno a través de las gráficas analiza e interpreta las relaciones de las variables presentadas y utilicen procedimientos al resolver el problema que se puede plantear con una ecuación de la forma $ax+b=c$ y con el conjunto de valores

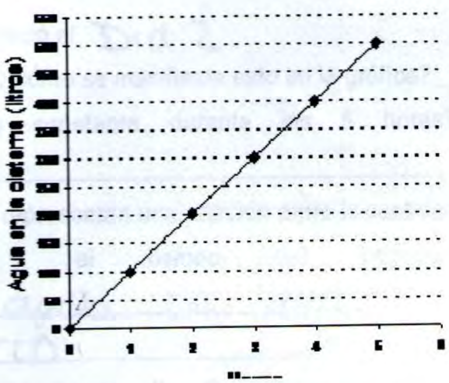
Actividad 3:

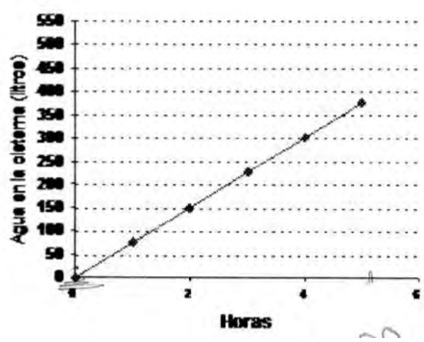
Con la finalidad de ahorrar agua, en el municipio de Carlos A. Madrazo únicamente hay suministro de este líquido 5 horas al día. Las siguientes gráficas representan la relación tiempo (horas) y la cantidad de agua (litros) que hay en la cisterna de una unidad habitacional en 3 días diferentes. Analícenlas y posteriormente contesten lo que se pide.

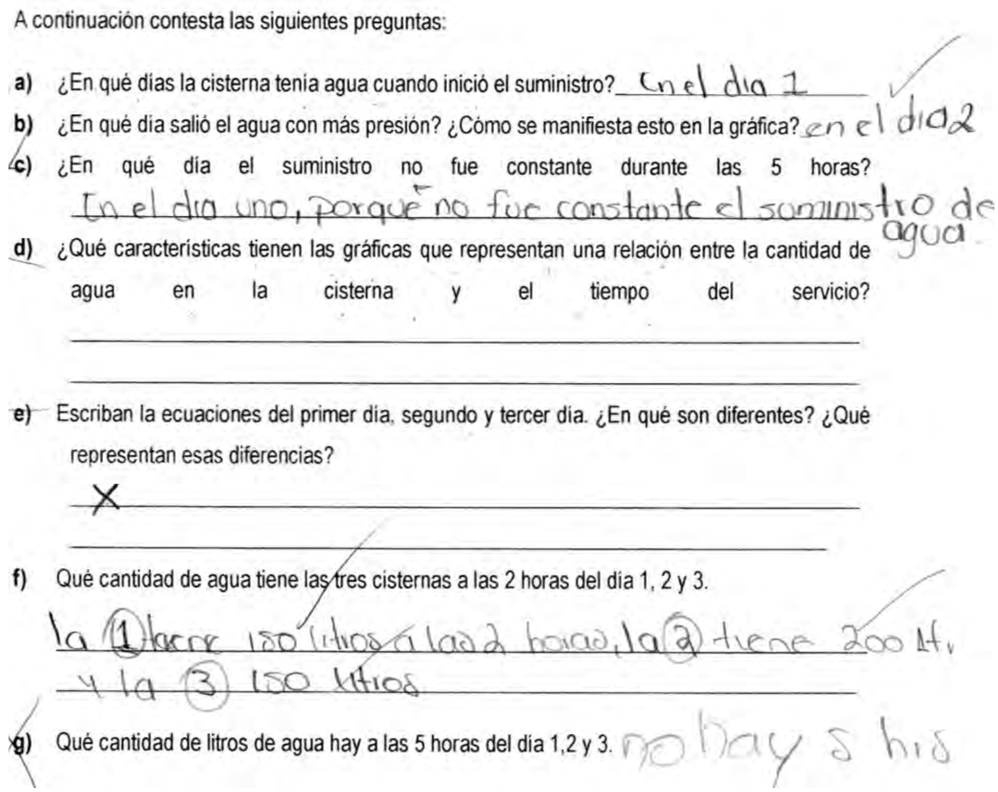
Día 1



Día 2







A continuación contesta las siguientes preguntas:

a) ¿En qué días la cisterna tenia agua cuando inició el suministro? En el dia 1

b) ¿En qué dia salió el agua con más presión? ¿Cómo se manifiesta esto en la gráfica? en el dia2

c) ¿En qué día el suministro no fue constante durante las 5 horas?

En el dia uno, porque no fue constante el suministro de agua

d) ¿Qué características tienen las gráficas que representan una relación entre la cantidad de agua en la cisterna y el tiempo del servicio?

e) Escriban la ecuaciones del primer dia, segundo y tercer día. ¿En qué son diferentes? ¿Qué representan esas diferencias?

X

f) Qué cantidad de agua tiene las tres cisternas a las 2 horas del dia 1, 2 y 3.

la 1 tiene 150 litros a las 2 horas, la 2 tiene 200 lt, y la 3 150 litros

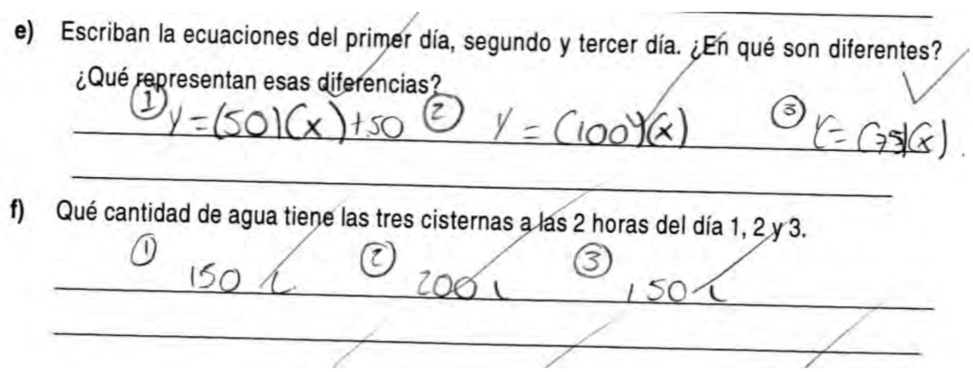
g) Qué cantidad de litros de agua hay a las 5 horas del dia 1,2 y 3. no hay 5 hrs

Figura 4.10. Presentación de la actividad 3.

Se observó una interacción entre los miembros de los equipos de trabajo, todos externaron sus ideas e incluso comentaron sus puntos de vista frecuentemente con el profesor al ser monitoreados. Por ejemplo el equipo 1 y 7 mencionó que “en el día 1 hay 50 litros de agua. En el día 2 y 3 no hay agua por lo que estaba inicialmente vacía la cisterna”. Los equipos 2, 3, 4, 5, 6 y 8 comentaron que: “ el suministro de agua solo se da en 5 horas al día y aún así se cuenta en el día 1 con 50 litros, es decir, que únicamente en ese día hay menos consumo de agua”.

En la pregunta del inciso *c* siete equipos de ocho (equipos 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8) contestaron incorrectamente, posiblemente debido a que los alumnos no tuvieron una buena visualización de los datos de los ejes de coordenadas de las gráficas. El equipo 1 contestó de manera correcta.

En los incisos *e* y *f* tres equipos de ocho (equipos 4, 5 y 6) plantearon de manera correcta sus ecuaciones e ideas al profesor. Estos equipos en el inciso *e* identificaron el patrón de comportamiento de cada una de las gráficas de acuerdo al día 1, 2 y 3, lo cual los llevó a escribir la ecuación y =50 x +50, y =100 x y y =75 x (Figura 4.11, inciso *e*; donde x representa el número de horas y y representa la cantidad de agua que contiene la cisterna.


e) Escriban la ecuaciones del primer día, segundo y tercer día. ¿En qué son diferentes? ¿Qué representan esas diferencias?

① $y=(50)(x)+50$ ② $y=(100)(x)$ ③ $y=(75)(x)$

f) Qué cantidad de agua tiene las tres cisternas a las 2 horas del día 1, 2 y 3.

① 150 L ② 200 L ③ 150 L

Figura 4.11. Respuestas de los incisos *e* y *f*.

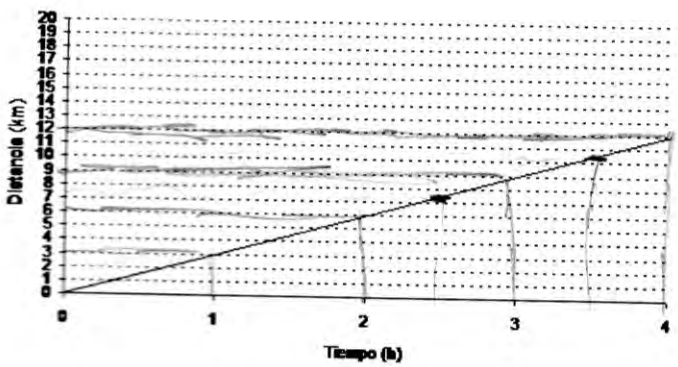
Los equipos 2, 3, 7 y 8 (4 equipos de 8) tuvieron dificultad para responder el inciso *e* pero no el inciso *f* donde se nota la claridad al responder la cantidad de agua que tienen las cisternas a las 2 y 5 horas los días 1, 2 y 3. Esta información seguramente la obtuvieron de la gráfica y no precisamente de la relación previamente identificada.

Seguidamente, se continuó con la actividad 4 (Figura 4.12)**,** donde los equipos procedieron a identificar los datos y relaciones entre éstos (tiempo y distancia en km), y las operaciones correspondientes para el llenado de la tabla.

Los integrantes de los equipos 1, 2, 3, 4 y 7, establecieron puntos de referencia y no mostraron dificultad para identificar la relación entre las variables. Se les mencionó a los demás equipos que podían rayar o ubicar puntos de referencia y así lo hicieron relacionando en las gráficas las coordenadas correspondientes a cada hora.

Actividad 4.

Agrupados en equipos analicen la siguiente gráfica que representa la relación entre tiempo y distancia recorrida en una caminata que realizó Ernesto. Posteriormente contesten lo que se pide.



a) Si la velocidad de Ernesto hubiera sido mayor, ¿qué diferencia habría tenido la gráfica respecto a ésta? Mas Perpendicular

b) ¿A qué velocidad se desplazó Ernesto? 3 Km por 1 hora

c) Registra en la siguiente tabla los valores que faltan:

Tiempo (h)	0.5	1	2	2.5	3	3.5
Distancia (km)	1.5	3	6	7.5	9	10.5

d) Si *x* es el tiempo y *y* la distancia recorrida, ¿qué ecuación representa esta situación? $x - y = V$

Figura 4.12. Los estudiantes expresaron "que la caminata de Ernesto se presenta de acuerdo con el tiempo y éste se observa en el eje de las *x* y la distancia en el eje de las *y*".

El inciso *a* lo respondieron bien sólo dos equipos de ocho (equipos 5 y 6). Cinco equipos de ocho (equipos 2, 3, 4, 5 y 6) contestaron el inciso *c*, se pusieron de acuerdo sobre el llenado de la tabla y como multiplicar las cantidades (enteras y decimales), donde se establece la relación entre el tiempo y la distancia; mientras que tres equipos de ocho (equipo 1, 7 y 8) presentaron resultados no esperados. En el inciso *d* ningún equipo representó la expresión algebraica esperada de acuerdo con la tabla presentada en la actividad. En general los equipos se apoyaron en el uso de las calculadoras para hacer sus operaciones.

4.2.3.2. Observaciones

En resumen los estudiantes mostraron comprensión de las actividades al identificar los datos, las incógnitas y la relación entre estos mismo que se observó en el llenado de las tablas. Sin embargo, de nuevo, no fue tan sencillo para todos los equipos escribir este patrón en forma de ecuación. Los equipos coincidieron que en las gráficas se podía observar la línea recta. La tabla siguiente resume lo acontecido en el aula.

Tabla 4.3. Resumen del conocimiento adquirido por los equipos.

Gráfica ⟶ Ecuación

Equipos	Perfil
1, 4, 5, 6	Detectaron patrón de comportamiento, visualizaron los valores de las escalas de cada uno de los ejes y simbolizaron de manera algebraica.
2, 3,7 y 8	Detectaron patrón de comportamiento, no visualizaron los valores de las escalas de cada uno de los ejes y no simbolizaron de manera algebraica.

Al final de la sesión el profesor intervino para generar una discusión sobre la gráfica, esto permitió que los equipos detallaran más sus observaciones. Lo anterior permitió retroalimentar la sesión. El profesor realizó de manera grupal una explicación de los conceptos que se plantearon en las preguntas de la actividad, con el fin de que los alumnos realizaran las modificaciones pertinentes y de esta manera buscó verificar que los estudiantes efectivamente lograran comprender la relación entre los datos, comprendieran el patrón de comportamiento dada la gráfica así como apoyarlos para representar la expresión algebraica.

4.2.4. Sesión 4

Los alumnos para resolver esta actividad necesitaron lápiz, borrador, reglas, calculadora, hojas y colores. El objetivo de la sesión 4 fue: El alumno obtiene una ecuación a partir de la gráfica de una función lineal que modela una situación y la relaciona con la pendiente de la recta.

En un tiempo de 2 horas con diez minutos se trabajó en la actividad 5. La descripción y análisis del desarrollo de esta sesión la subdividimos en ciclos de comprensión (ilustrados por el manejo de los registros de representaciones utilizados) o tipos de procedimientos emprendidos por los estudiantes, los cuales marcamos como a continuación se muestra (con el apartado 4.2.4.1 y 4.2.4.2).

El profesor antes de dar inicio con la sesión realizó brevemente una retroalimentación de la sesión 3 con el propósito de que los estudiantes, a partir de la información de la gráfica transitarán hacia la función lineal $ax + b = c$, la cual relacionaba las variables: número de meses y el precio del artículo.

4.2.4.1. De la representación gráfica a la representación simbólica. Identificación de datos, patrones de comportamiento y su relación con la escritura simbólica de relaciones

El profesor comenzó la sesión con instrucciones para conformar de nuevo los 8 equipos. Posteriormente repartió las hojas con las actividades y enseguida las leyó junto con el grupo. El profesor preguntó, como siempre, si era clara la actividad, a lo que los alumnos respondieron de manera afirmativa; y en equipos dieron inicio al proceso de resolución.

Los equipos observaron la gráfica (Figura 4.13) con el propósito de contestar las preguntas correspondientes a la actividad 5. Procedieron a identificar datos y relaciones entre el número de meses y el precio del artículo; con esta información contestaron las preguntas incorporadas dentro de la actividad.

OBJETIVO DE LA SESIÓN: El alumno obtiene a partir de la gráfica de una función lineal la ecuación lineal que modela la situación del fenómeno que representa y lo relaciona con la inclinación o pendiente de la recta que lo presenta.

Actividad 5.

Analicen la siguiente gráfica que muestra los cambios en el precio de un artículo durante los primeros meses del año, posteriormente den respuesta a las preguntas.

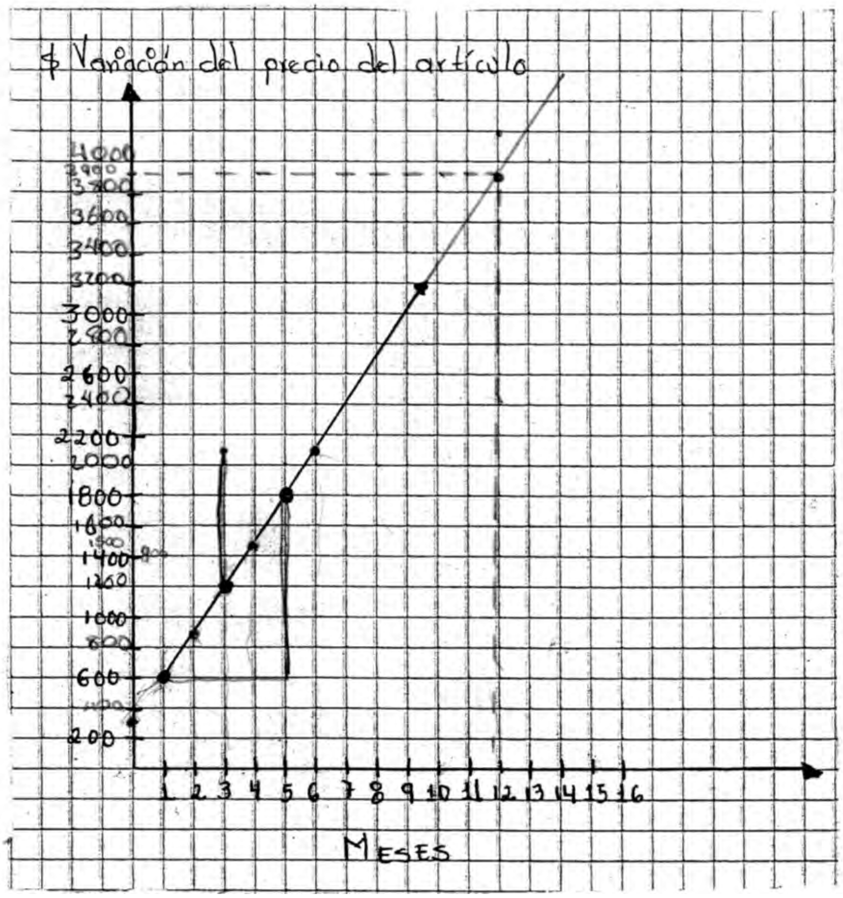


Figura 4.13. Gráfica de la actividad 5. Se observa en ella parte del análisis hecho por los estudiantes.

Cada uno de los equipos externó sus ideas y sus puntos de vista, en cuanto a cómo resolver la actividad. Por ejemplo, expresaron: “en la gráfica se aprecia una línea recta”, “se observan los puntos [se referían a los puntos de intersección de la línea recta con los ejes del plano cartesiano]” y “el costo del artículo va incrementando con el paso de los meses”.

a) ¿Cuánto varió el precio del primero al segundo mes?

de 300 pesos

b) ¿Cuánto varió el precio del primero al tercer mes?

el doble del inicio $ (600)

c) ¿Cuánto varió el precio del primero al cuarto mes?

Vario $ 900 pesos

d) ¿Cuánto varió el precio del tercero al sexto mes?

Vario $900 pesos

e) Si el primer mes corresponde a enero, ¿cuál es el precio del artículo en marzo? ¿Cuál será el precio del artículo en diciembre?

en Marzo costo $1200, En diciembre Seria $3900 pesos

j) ¿Varia el incremento de un mes a otro mes?, si es así ¿Cuánta varía?

Si, 300 en 300

k) ¿A qué se debe la diferencia entre los precios? Que cada mes cuesta $300 mas

l) ¿Qué variable depende de otra? del valor de los meses para lo que cue

m) Escribe la relación que guardan las variables?

Cada mes 300 y asi Sucecivamente

n) Expresa la ecuación $y = 300x + 300$

o) Ahora, expresa la ecuación en forma de función: $fx = 300x + 300$

p) Identifica la pendiente y la ordenada al origen: Pendiente 300 ordenada 300

q) ¿Qué precio tendría el artículo en el mes número 100? ¿Ecuación que te permita calcularlo?

30,300

r) A partir de la ecuación anterior, ¿cuál es el precio del artículo al 300 mes? 90,300

? s) ¿En qué mes el artículo cuesta 4000?, ubícalo en la gráfica. 13.3

Figura 4.14. Incisos de la actividad 5, contienen respuestas escritas por los estudiantes de un equipo.

Al abordar los incisos, varios equipos completaron la gráfica, identificaron otros precios, así como prolongaron el trazo de la línea recta hasta la intersección con el eje *y*.

4.2.4.2. La representación simbólica, manipulación algebraica, significado de ecuación y función.

Tres equipos de ocho (equipos 1, 7 y 6) contestaron que el incremento (inciso *j*) varía de un mes a otro y que va de 300 en 300.

Todos los equipos contestaron de manera correcta el inciso *n*. El inciso *s* lo contestó correctamente el equipo 6; ubicó el valor de 4000 (costo del artículo) en la gráfica al prolongar la línea recta.

El propósito del inciso *s* fue que los alumnos encontrarán el mes correspondiente al costo del artículo de 4000 y que ubicarán en el plano cartesiano la información. Este dato podían obtenerlo a través de la ecuación identificada. Algunos equipos así procedieron mientras que otros trabajaron solo con la gráfica. Este inciso *s* y el *n* fueron los más consultados al profesor y los más discutidos entre los integrantes del equipo.

Siete equipos de ocho (equipos 1, 2, 3, 4, 5, 7 y 8) tuvieron dificultad en identificar el valor de 4000 en la gráfica, ya que los equipos en su mayoría respondieron el mes 12. También se observó dificultad para agregar valores en el eje de las *y* de acuerdo con la escala presentada. Mientras que el equipo 6 no tuvo dificultades.

Cinco equipos de ocho (2, 3, 4, 6 y 8) identificaron el valor de la pendiente y ordenada al origen (inciso *p*); mientras que tres equipos de ocho (equipos 1, 5 y 7) no pudieron identificar el valor de la pendiente y la ordenada al origen de acuerdo a la gráfica presentada en dicha actividad.

4.2.4.3. Observaciones

En resumen, los estudiantes mostraron comprensión de la actividad al interpretar la gráfica. Se observó que los equipos pudieron identificar el patrón de comportamiento de la gráfica de la actividad 5, es decir identificaron la relación entre el precio del artículo y el número de meses, lo cual les permitió contestar los incisos *a, b, c, d, e, k* y *m*. En el inciso *l* contestaron que la variable de los precios depende del mes. Identificaron el patrón de comportamiento de los datos numéricos de acuerdo con la gráfica y lo expresaron en forma de ecuación lineal en los incisos *n* y *o*, respectivamente.

De acuerdo con el objetivo planteado en la actividad 5 se observó que cinco equipos de ocho lograron comprender la relación entre los datos y escribirla a manera de ecuación lineal.

Tabla 4.4. Resumen del conocimiento adquirido por los equipos.

Gráfica $\longrightarrow$ Ecuación

Equipos	Perfil
1,2,3,4,5,7 y 8	Detectaron el patrón de comportamiento, prolongaron la gráfica de la línea recta y simbolizaron de manera algebraica.
6	Detectaron el patrón de comportamiento, identificaron y agregaron más valores en los ejes de coordenadas, pero no pudieron escribir la expresión algebraica.

Debido a lo anterior, y con el propósito de retroalimentar la actividad de los estudiantes, el profesor retomó las dudas de los estudiantes, y en discusión grupal, aprovechando los avances de algunos equipos, las aclaró. Se hizo énfasis en la necesidad de identificar el patrón de comportamiento de los datos, que presenta la gráfica, para posteriormente transitar hacia la escritura de la ecuación lineal. Durante la intervención del profesor, los integrantes del equipo interactuaron entre ellos con el propósito de corregir y validar sus propias respuestas y estrategias para llegar a la solución.

4.3. Evaluación final

La prueba se aplicó con el propósito de conocer el aprendizaje que alcanzaron los estudiantes de bachillerato después de la implementación de todas las sesiones.

El profesor dio inicio con la sesión dando las indicaciones a los alumnos para la aplicación de la evaluación final. Esta prueba contiene tres problemas, los cuales se consideró que podían resolverse en un tiempo de 2 horas.

El propósito del primer problema (anexo A) fue observar cómo los estudiantes transitaban de la representación tabular hacia la ecuación lineal. Se observó que 21 alumnos llenaron de manera correcta los datos de la tabla y 3 tuvieron debilidades en multiplicar el número de pasos por los minutos obteniéndose de esta manera un resultado incorrecto. Debido a esto 21 alumnos contestaron de manera correcta las preguntas de los incisos *a* y *b* que contiene el tiempo que le toma a Mario recorrer 1700 y 2800 pasos.

En los incisos *c* y *d* donde se solicita que el alumno escriba la ecuación y la función lineal del problema respectivamente los 24 estudiantes tuvieron dificultad en expresarlo. El 88% de los estudiantes logró resolver el llenado de la tabla, pero careció de conocimientos para establecer la transición del patrón del comportamiento a la escritura de la ecuación lineal.

El segundo problema, se refiere al costo del número de fotocopias. Se diseñó elaborando la tabla que sería la base para la comprensión de la ecuación y función lineal así como para la transición hacia la representación gráfica.

Primeramente los estudiantes realizaron el llenado de la tabla donde se observó que 24 alumnos lo desarrollaron de manera correcta. Seguidamente se procedió a contestar el inciso *a* donde 9 alumnos respondieron de manera correcta mientras que 15 alumnos tuvieron dificultades para llegar a la respuesta, posiblemente debido a que los alumnos no comprendieron la pregunta.

En el inciso *c* 17 alumnos contestaron de manera correcta a la pregunta: ¿La suma de $ 2.00 varía en cualquier costo de número de fotocopias? Explica; en esta pregunta se observa que 7 alumnos no lograron identificar qué significaba que una cantidad variara.

En el inciso *d* donde se solicita la ecuación que represente el costo y el número de copias, 11 alumnos contestaron de manera correcta mientras que 13 alumnos tuvieron dificultades para dar una respuesta satisfactoria.

En el inciso *e* 13 alumnos lograron transitar de manera correcta de la tabla a la función lineal (a pesar de que en la tabla ya se les estaba dando dicha función) y 11 contestaron de manera errónea.

Seguidamente en el inciso *f* se solicitó a los alumnos el trazado de la gráfica de acuerdo con los datos de la tabla donde 18 alumnos lo resolvieron de manera correcta mientras que 6 alumnos tuvieron dificultades para ubicar los datos en los ejes de las x y y.

El 100% de los estudiantes logró resolver el llenado de la tabla, el 75 % elaboró la gráfica de manera correcta. Pero más del 46 % tuvo dificultad en la transición de la tabla hacia la ecuación y función lineal.

El tercer problema se diseñó con el propósito de que el alumno logrará realizar una transferencia de conocimientos, ya que el problema se relaciona con una función lineal. El contexto de este problema es una situación donde un empleado recibe mensualmente un salario fijo de 200 pesos más el 10%, pero éste salario puede aumentar mes con mes dependiendo de las ventas de la tienda (anexo A).

El salario varía de acuerdo con la expresión $\mathrm{m}(s)=200+0.1s$, donde m es el salario mensual y s representa las ventas mensuales (anexo A). Sin embargo, al momento que los alumnos leyeron el problema para contestar las preguntas, el profesor observó que existían dificultades de comprensión y dudas. Entre otros aspectos en las sesiones desarrolladas no se consideró la resolución de un problema que manejara contextos con cantidades porcentuales, además de que el problema estaba mal redactado. Por lo que se consideró la cancelación de éste.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de acuerdo con los objetivos de las tesis, y con el análisis de la implementación de la propuesta didáctica. Se presentan reflexiones finales, sugerencias y recomendaciones derivadas de los hallazgos y conclusiones expuestas. Lo anterior sirvió para enmarcar sugerencias para mejorar la propuesta, su implementación, resultados e inclusive para promover el desarrollo de investigaciones sobre el tema.

Conclusiones

Toda la información que se ha presentado en este documento fue obtenida de un grupo de estudiantes del plantel Carlos A. Madrazo, en donde se aplicó la propuesta didáctica y la evaluación final. La propuesta didáctica corresponde al bloque VI del programa de estudio de bachillerato.

Con el propósito de comprender los conceptos de ecuación y función lineal se diseñaron e implementaron actividades en un ambiente de resolución de problemas, donde se buscó que los alumnos pudieran comprender estos conceptos de forma simultánea al desarrollo de sus habilidades para elaborar tablas, gráficas y expresiones algebraicas; y de esta manera pudieran interpretar situaciones de la vida cotidiana.

Aprendizaje de los alumnos. Los resultados de la evaluación final arrojaron que existió cierta mejoría en algunos alumnos en cuanto a la comprensión de la ecuación y función lineal, así como en el manejo y transición entre sus representaciones. Se identificó, por ejemplo, que los estudiantes mejoraron la elaboración de sus representaciones gráficas, puesto que al inicio de la propuesta didáctica la mayoría tuvieron varias dificultades. También, algunos estudiantes aprendieron a identificar patrones de datos en las tablas y gráficas, aunque no todos lograron simbolizar algebraicamente a partir de esa identificación de patrones de datos.

Los resultados de cada sesión y de la evaluación final permitieron observar debilidades tanto conceptuales como de habilidades de los estudiantes, al inicio, durante y al final de la implementación de la propuesta. Se observó, por ejemplo, que en algunas de las actividades, varios estudiantes mostraron dificultades para simbolizar algebraicamente y darle sentido a las expresiones simbólicas. También se observó que en el tercer problema del instrumento de evaluación los estudiantes no lograron transferir sus habilidades aprendidas para analizar un problema que requería el uso del conocimiento de porcentajes para resolverse.

El ambiente de resolución de problemas. Se identificó que la creación del ambiente de resolución de problemas fomentó participación e interés de los estudiantes hacia los conceptos matemáticos. Otro aspecto que influyó, también, de manera positiva, fue el tipo de actividades, las cuales fueron cercanas al contexto de los estudiantes.

Al trabajar con la perspectiva de resolución de problemas se encontraron varios obstáculos, entre ellos que el docente no estaba acostumbrado a trabajar con esta práctica. Por lo que se debería ofrecer de manera institucional y sistemática la capacitación docente para tal fin. El docente debe tener conocimiento y experiencia en el uso de esta perspectiva, para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La propuesta didáctica. Se observó que si se toma en cuenta la carga horaria considerada en el programa de 8 horas y el docente utiliza el método de resolución de problemas no es posible alcanzar en tiempo y forma los objetivos que el programa demanda en cuanto al cumplimiento de todos los indicadores de desempeño. Se requiere de más actividades y por lo tanto mayor tiempo para que el estudiante comprenda los conceptos y la relación entre estos. Así como mayor tiempo, para lograr los ocho indicadores enmarcados dentro del bloque VI, aquí solo se consideraron cuatro para el diseño de la propuesta.

La propuesta didáctica así diseñada más el ambiente de resolución de problemas en el cual fue implementado propició que los estudiantes:

- Construyeran e interpretaran modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones cercanas al contexto.
- Resolvieran problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Argumentaran la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analizaran la relación entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Interpreten tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Lo anterior forma parte de las competencias disciplinares básicas en el bachillerato.

Recomendaciones

Dado que el tiempo utilizado en la implementación de la propuesta no fue suficiente para que los estudiantes desarrollaran el conocimiento deseado, se recomienda que se agreguen más actividades a la propuesta y se use más tiempo en la discusión tanto por parte de los estudiantes como grupales con apoyo del profesor. Se sugiere, una revisión de los indicadores que se consideran dentro del bloque VI para que estos sean más explícitos y no den lugar a diferentes interpretaciones, que estén de acuerdo con los contenidos y se puedan desarrollar en la carga horaria programada dentro del programa de estudios, el cual debe tomar en cuenta la situación real de los estudiantes de bachillerato.

Es importante que el docente proporcione a los alumnos talleres, cursos que tengan relación con los temas de fracciones, despejes, porcentajes, proporcionalidad, etc.; con el propósito de que de manera simultánea o previa a la resolución de problemas de su contexto desarrollen los estudiantes conocimientos con respecto a estos temas y adquieran habilidades y competencias.

Los docentes de matemáticas deberían hacer uso de la resolución de problemas, tomando en cuenta el contexto de los estudiantes con el fin de motivar al alumno y propiciar su interés en el aprendizaje de las matemáticas. También, los docentes podrían apoyarse de la aplicación de algún software para el diseño de las gráficas.

Algo importante a observar es que el docente debe ser cuidadoso al enfrentarse a las debilidades que posee el alumno en cuanto a la comprensión de los problemas propuestos en el aula y sus procesos de solución, evitar sentir frustración al observar estos patrones de comportamiento, y sobre todo evitar recurrir de nueva cuenta a la aplicación de ejercicios rutinarios como único método de enseñanza y aprendizaje.

Por último se considera que es importante promover dentro del aula el trabajo colaborativo fomentando la participación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades, para lograr una integración social y desarrollar la conciencia de grupo, al mismo tiempo que se realizan las actividades propiamente matemáticas.

En términos generales deberían integrarse academias de maestros en las que compartan periódicamente experiencias por ejemplo con respecto al diseño de este tipo de problemas. Procurar una buena relación maestro-alumno que propicie un ambiente favorable para el aprendizaje, ya que favorece la generación de preguntas e interacción por parte de los alumnos, al perder el miedo con el maestro y hacia el grupo de trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1996. *Libro para el Maestro.* Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. México.

Brihuega, J. (2000). *El algebra.* Consultado en Noviembre 25, 2012 en http:roble.pntic.mec.es/jbriegua/MBgonz.htm.

Cristóbal, C (2010). *Notas sobre Aprendizaje y Aprendizaje de las Matemáticas, elementos de un marco teórico.* Chetumal, Q. Roo: Universidad de Quintana Roo.

De Corte, E. (2007). Learning from instruction: the case of mathematics. *En Learning Inquire*, *1,* 19-30.

Kilpatrick, J. (2002). Understanding mathematic literacy: contributions of research. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(1), 101-116.

Grows, D. A. (2004). The Teacher´s Role in teaching mathematics through problema solving. En H. L. Shoen (Ed.). *Teaching mathematics trough problema solving* (pp. 129-142). Resto, VA: NCTM.

Duval (2004). *Los Problemas Fundamentales en el aprendizaje de las Matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Universidad del Valle (Trabajo original publicado en 1999).

Duval, R. (1996). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Traducción de uso interno realizada por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN, México. Título original *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65, IREM de Stramburgo, 1993.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel, Dordrecht, The Netherlands. *Educational Studies in Mathematics*, *1*, 3-8.

Furinghetti, F. (1993). Images of mathematics outside the community of mathematicians: Evidence and explanations. *For the learning of mathematics* 13(2). P. 33 –

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. Estado de México: Pearson Educación.

Kaput (1999). Teaching and Learning a new Algebra. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.). *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp. 133-155). USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM* , *38 (3)*, 269-280.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios para la Educación Matemática.* (M. Fernández, Trad.). España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Trabajo original publicado en 2000).

Rico, L. (2000). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* I.C.E. Universidad Barcelona. Horsori. Pág:12

Reid, M. E., Gareis, M. I., Hernández, A. E. & Roldán, M. V. (2012). Funciones con Modelización algebraica. *Números, 81*, 91-101

Santos, L. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Didáctica Lecturas. Edit. Iberoamérica. México.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando Florida: Academic press. Inc.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense - making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. En J.F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education (*pp. 311 - 343). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Macmillan. New York. Tomado de http://www-gse.berkeley.edu/faculty/aschoenfeld/ el 25.04.05

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouwns (Ed.). *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Co. USA.

Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP. (2009). REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MEXICO. Recuperado el 20 de mayo de 2009, de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/programasdeestudio.php

Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP. (2008). REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MEXICO. Recuperado el 27 de noviembre de 2012, de http://portalsej.jalisco.gob.mx/sites/portalsej.jalisco.gob.mx.educacion-media-superior/files/pdf/acuerdo_442.pdf

Yackel, E. & Rasmussen C. (2002). Beliefs and Norms in the mathematics classroom. En G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 313-330) Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Anexos

A) Propuesta didáctica

OBJETIVO GENERAL: Propiciar el aprendizaje de la relación de la ecuación y función lineal a través de representaciones graficas, tabulares y analíticas mediante problemas contextualizados.

Secuencia de actividades no. 1- 4

TIEMPO: 4 sesiones de **2 horas**

Sesión 1: 2 horas.

OBJETIVO DE LA SESIÓN: El alumno a través de las tablas utiliza procedimientos para resolver el problema que se puede plantear con una ecuación de la forma $ax = b$ y $ax + b = c$.

Materiales y Recursos didácticos

Marcadores Hojas en blanco Regla Hoja de papel cuadriculado Colores

FASE DE APERTURA: **TIEMPO:** 15 minutos

INSTRUCCIONES:

El facilitador:

En esta sesión se presentó a los alumnos el objetivo a alcanzar con la actividad planteada. Con la intención de que el alumno recuerde e identifique en su vida diaria la utilidad de las ecuaciones lineales con una incógnita se sugiere formar equipos de 3 integrantes. Donde se selecciono a un integrante del equipo que fungiera como secretario con el propósito de que al final de la clase se entregue el material al docente. También se les menciono que deberán escribir de manera clara y ordenada el procedimiento de la solución del problema.

FASE DE DESARROLLO **TIEMPO:** 70 minutos

INSTRUCCIONES:

El facilitador:

En esta actividad es necesario que al resolver este problema se analice de manera grupal el desarrollo de los procedimientos utilizado por los estudiantes guiados por el docente. Con el objetivo de propiciar en el alumno el análisis, el cálculo de las operaciones básicas, los diferentes tipos de letras que se pueden utilizar para la representación de la incógnita, su solución y ecuaciones lineal del problema. Hablar un poco de despejes, operaciones básicas y la presentación de los datos en la tabla. Cambiar expresiones algebraicas de diferentes tortillas y que sea breve.

Actividad 1.

En equipo, realiza una tabla en donde coloques el precio a pagar por **x** kilos de tortillas y veas cuanto crece la cantidad a pagar, cuando crecen los kilos comprados; grafica los datos y resuelve las preguntas. Considera que el kilo cuesta 12 pesos.

Kilo de tortillas	Precio a pagar
¾	
2	
3 ½	
5	
7.5	
8 ¾	
17	
25.5	

a) Si una tortillería produce 215.5 kilos al día. ¿cuánto dinero ingresa si todo se vende?________________

b) Expresa la ecuación que te permita calcular el costo de cualquier número de tortillas:________________

c) Utiliza esta expresión para calcular el costo de 51 kilos de tortillas. Explica el procedimiento:____

d) La siguiente ecuación $\frac{2}{5}y - x = \frac{3}{4}$ es utilizada para cobrar el costo total de las tortillas. La "x" representa la cantidad en kgr de tortillas, la "y" la cantidad total a pagar y el valor constante es el costo de la envoltura de las tortillas. Despeja el valor de "y" ____

e) Si ingresa 780 pesos de tortilla a cuantos kilos equivale:_________________________

f) A cuanto equivale en kilos 20 pesos de tortillas:_________________________________

FASE DE CIERRE: **TIEMPO:** 15 minutos

INSTRUCCIONES:

El facilitador:

Se menciona que el problema se resolvió con una ecuación lineal porque representa fenómenos que se comportan de manera lineal (a través de una recta) como los ingresos (a mayor venta, mayor ingreso), los costos de producción en una fábrica, entre otros. Es un tópico en el que se puede dilucidar su utilidad (de quien) en el campo profesional, escolar y en la vida diaria. Se les indica a los alumnos que escriban de manera clara y ordenen el desarrollo de los problemas.

Tarea Extraclase

1. Solicita a los alumnos que entreguen el mismo problema que se desarrolló en salón de clase de manera individual y redacten los procedimientos que lo llevaron a obtener la solución de cada una de las preguntas del problema.
2. Considerando que cada una de estas ecuaciones es utilizada en diferentes tortillerías para cobrar. Realice el despeje de las siguientes ecuaciones para encontrar cuantos kilos de tortilla comprare con una determinada cantidad de dinero.

a) $y+2x-8=0$ *b)* $2x+3y=-1$

SESIÓN 2: 2 horas.

OBJETIVO DE LA SESIÓN: El alumno a través de las tablas utiliza procedimientos al resolver el problema que se puede plantear con una ecuación de la forma $ax + b = c$.

FASE DE APERTURA **TIEMPO:** 15 minutos

INSTRUCCIONES:

El facilitador:

En esta sesión se presenta a los alumnos el objetivo a alcanzar con las actividades planteadas. Con la intención de que el alumno recuerde e identifique en su vida diaria la utilidad de las ecuaciones lineales con una incógnita se sugiere formar equipos de 3 integrantes. Donde seleccionaran a un integrante del equipo que fungirá como secretario con el propósito de que al final de la clase se entregue el material al docente. También es importante comentar que deberá escribir de manera clara y ordenada el procedimiento de la solución del problema.

Actividad 2.

1. Gleysi la encargada del fotocopiado de la papelería "Candy" desea elaborar una tabla para agilizar el cobro del número de copias de un tríptico que se vende a los alumnos. Ella sabe que el costo de las fotocopias depende del número de hojas, es decir: por 10 copias se cobran $21.00, por 20, $ 41.00, etc.

La encargada también sabe que por cada 10 copias el aumento es de $ 20.00, esto significa que cada copia cuesta $ 2.00. Pero, ¿por qué las primeras 10 fotocopias cuestan $21.00? Porque el tríptico del cual se derivan las copias cuesta $ 1.00. Por lo tanto, el costo de 10 fotocopias es de: 2(10) =$ 20.00. Más $ 1.00 de gasto inicial: 20 + 1 = $ 21.00

En la tabla de la derecha indica el costo en pesos de las fotocopias y **x** el número de fotocopias.

Número de copias **x**	**Desarrollo** **y =2x + 1**	**Costos** **y**
10		
20		
30		
40		
50		
60		
100		
120		
160		
200		

Utiliza los datos y contesta las preguntas:

a) ¿Qué cuesta más, fotocopiar 20 o 30 trípticos? ¿Por qué?

____

____

b) ¿Por qué a cualquier costo de número de fotocopias siempre se le suma 1?

____

____

c) ¿La suma de un peso varía con cualquier costo de número de fotocopias? Explica____

____

d) Expresa la ecuación del problema:___________________________________

e) Representa gráficamente la función y =2x + 1

FASE DE CIERRE **TIEMPO:** 15 minutos

INSTRUCCIONES:

El facilitador:

Se menciona que el problema se resolvió con una ecuación lineal porque representan fenómenos que se comportan de manera lineal (a través de una recta) como los ingresos (a mayor venta, mayor ingreso), los costos de producción en una fábrica, entre otros. Es un tópico en el que se puede dilucidar su utilidad en el campo profesional, escolar y en la vida diaria. Se les indica a los alumnos que escriban de manera clara y ordenan el desarrollo de los problemas.

Tarea Extraclase

1. Solicita a los alumnos que entreguen el mismo problema que se desarrolló en salón de clase de manera individual y redacten los procedimientos que lo llevaron a obtener la solución de cada una de las preguntas del problema.

Sesión 3: 4 horas.

OBJETIVO DE LA SESIÓN: El alumno a través de las gráficas analiza e interpreta las relaciones de las variables presentadas y utiliza procedimientos al resolver el problema que se puede plantear con una ecuación de la forma $ax+b=c$ y con el conjunto de valores.

FASE DE APERTURA: **TIEMPO:** 15 minutos

INSTRUCCIONES:

El facilitador:

En esta sesión se presenta a los alumnos el objetivo a alcanzar con las actividades planteadas. Con la intención de que el alumno recuerde e identifique en su vida diaria la utilidad de las ecuaciones lineales con una incógnita se sugiere formar binas. Al finalizar la clase la bina entregará el material. También es importante comentar que deberá escribir de manera clara y ordenada el procedimiento de la solución del problema.

El facilitador, sí observa que los alumnos tienen dificultad para identificar las gráficas que representan una relación entre las variables menciona que pueden utilizar la herramienta que ayuda a presentar algunos valores en tablas y analizar su comportamiento.

FASE DE DESARROLLO: **TIEMPO:** 170 minutos

INSTRUCCIONES:

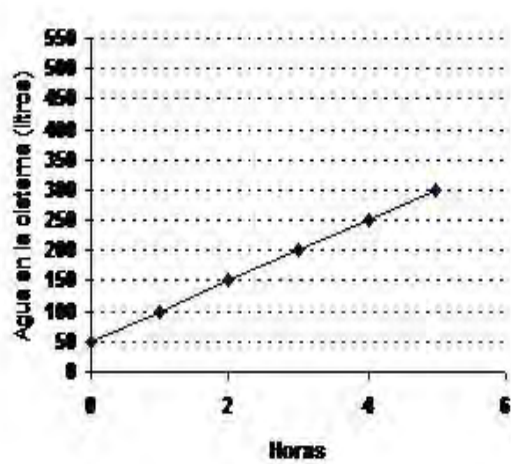
El facilitador:

En esta actividad es necesario que al resolver este problema se analice de manera grupal con un tiempo de 10 minutos aproximadamente el desarrollo de los procedimientos utilizado por los estudiantes guiados por el docente. Con el objetivo de propiciar en el alumno el análisis, el cálculo de las operaciones básicas, la representación de los diferentes tipos de letras de la incógnita, despejes, las variables, su solución y ecuación lineal que representa al problema.

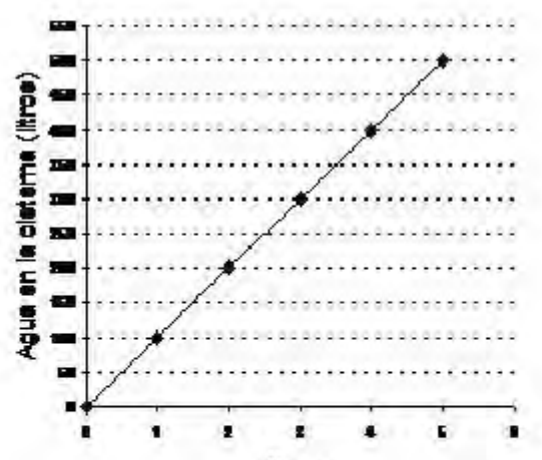
Actividad 3.

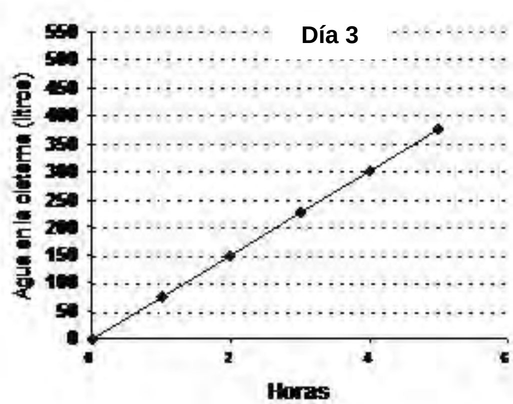
Con la finalidad de ahorrar agua, en el municipio de Carlos A. Madrazo únicamente hay suministro de este líquido 5 horas al día. Las siguientes gráficas representan la relación tiempo (horas) y la cantidad de agua (litros) que hay en la cisterna de una unidad habitacional en 3 días diferentes. Analícenlas y posteriormente contesten lo que se pide.

Día 1



Día 2





A continuación contesta las siguientes preguntas:

a) ¿En qué días la cisterna tenía agua cuando inició el suministro?___________________

b) ¿En qué día salió el agua con más presión? ¿Cómo se manifiesta esto en la gráfica?

____

____

c) ¿En qué día el suministro no fue constante durante las 5 horas?__________________

d) ¿Qué características tienen las gráficas que representan una relación entre la cantidad de agua en la cisterna y el tiempo del servicio?

____

____

e) Escriban la ecuaciones del primer día, segundo y tercer día. ¿En qué son diferentes? ¿Qué representan esas diferencias?

____

____

f) ¿Qué cantidad de agua tiene las tres cisternas a las 2 horas del día 1, 2 y 3?.

____

____

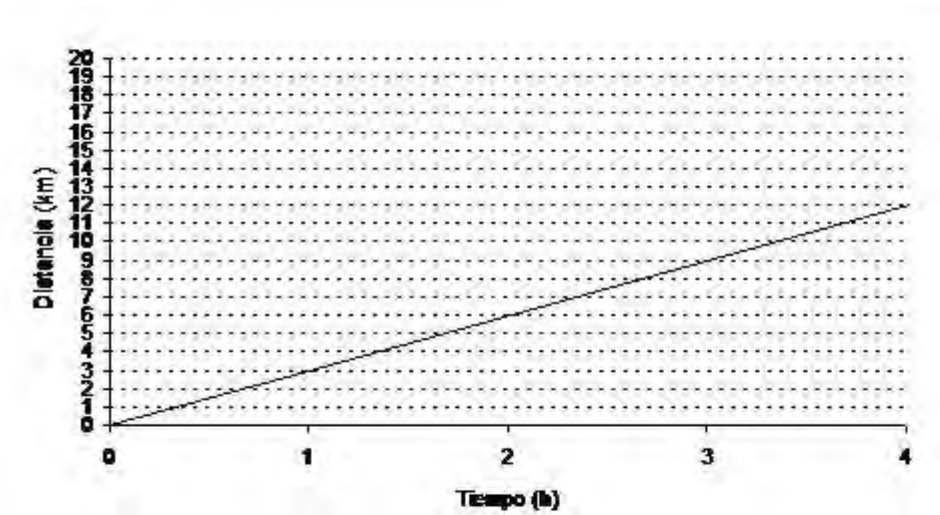
g) ¿Qué cantidad de litros de agua hay a las 5 horas del día 1, 2 y 3?.

____

____

Actividad 4.

Agrupados en equipos analicen la siguiente gráfica que representa la relación entre tiempo y distancia recorrida en una caminata que realizó Ernesto. Posteriormente contesten lo que se pide.



a) Si la velocidad de Ernesto hubiera sido mayor, ¿qué diferencia habría tenido la gráfica respecto a ésta?____

b) ¿A qué velocidad se desplazó Ernesto?__________________________________

c) Registra en la siguiente tabla los valores que faltan:

Tiempo (h)	0.5	1			3	
Distancia (km)			6	7.5		10.5

d) Si ***x*** es el tiempo y ***y*** la distancia recorrida, ¿qué ecuación representa esta situación?____

FASE DE CIERRE: **TIEMPO:** 15 minutos

INSTRUCCIONES:

El facilitador:

Da una breve retroalimentación de la actividad.

Tarea extraclase:

1. Solicita al estudiante que elabore de manera individual la actividad realizada en binas para entregar en la próxima clase.
2. Solicita que de manera individual planteen una situación parecida a la vista en el salón de clase y que construyan la gráfica correspondiente. Donde se verifica lo siguiente:
    - La gráfica corresponda con la situación planteada.
    - Representa algebraicamente la situación.

Sesión 4: 2 horas.

OBJETIVO DE LA SESIÓN: El alumno obtiene a partir de la gráfica de una función lineal la ecuación lineal que modela la situación del fenómeno que representa y lo relaciona con la inclinación o pendiente de la recta que lo presenta.

FASE DE APERTURA: **TIEMPO:** 15 minutos

INSTRUCCIONES:

Solicita al estudiante que entregue la tarea dejada en la sesión anterior.

Se presenta a los alumnos el objetivo a alcanzar con las actividades planteadas. Con la intención de que el alumno recuerde e identifique en su vida diaria la utilidad de las ecuaciones lineales con una incógnita se sugiere formar binas. Al finalizar la clase la bina entregará el material. También es importante comentar que deberá escribir de manera clara y ordenada el procedimiento de la solución del problema.

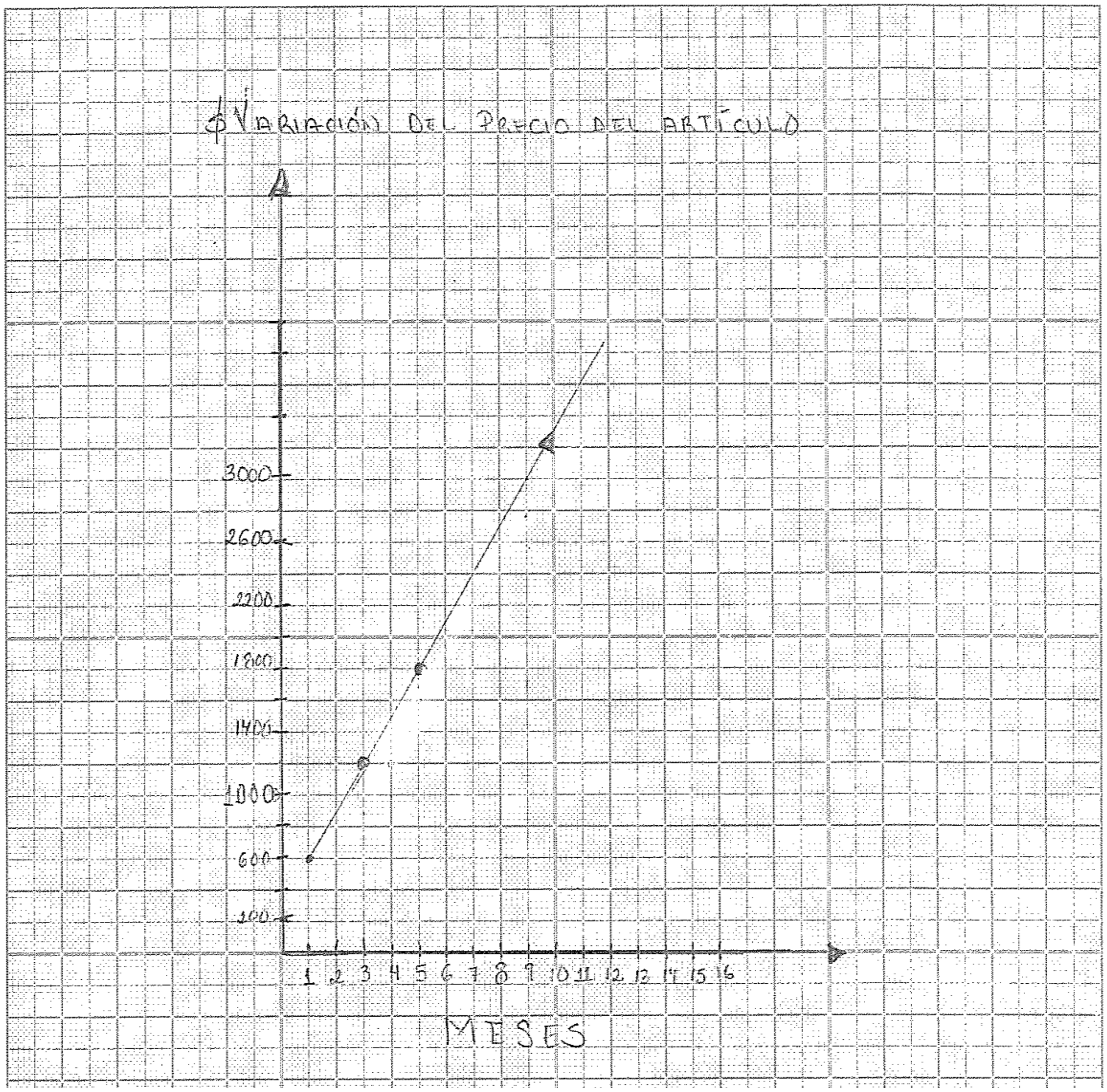
El facilitador, sí observa que los alumnos tienen dificultad para identificar las gráficas que representan una relación entre las variables, menciona que pueden utilizar la herramienta que ayuda a presentar algunos valores en tablas, analizar su comportamiento, así como el incremento.

FASE DE DESARROLLO **TIEMPO:** 70 minutos

INSTRUCCIONES:

Actividad 5.

Analicen la siguiente gráfica que muestra los cambios en el precio de un artículo durante los primeros meses del año, posteriormente den respuesta a las preguntas.



a) ¿Cuánto varió el precio del primero al segundo mes?

____

b) ¿Cuánto varió el precio del primero al tercer mes?

____

c) ¿Cuánto varió el precio del primero al cuarto mes?

____

d) ¿Cuánto varió el precio del tercero al sexto mes?

____

e) Si el primer mes corresponde a enero, ¿cuál es el precio del artículo en marzo? ¿Cuál será el precio del artículo en diciembre?

____

j) ¿Varía el incremento de un mes a otro mes?, sí es así ¿Cuánto varía?

____

k) ¿A qué se debe la diferencia entre los precios?________________________________

l) ¿Qué variable depende de otra?____

m) Escribe la relación que guardan las variables?

____

n) Expresa la ecuación____

o) Ahora, expresa la ecuación en forma de función:_______________________________

p) Identifica la pendiente y la ordenada al origen:________________________________

q) ¿Qué precio tendría el artículo en el mes número 100? ¿Ecuación que te permita calcularlo?

____

r) A partir de la ecuación anterior, ¿cuál es el precio del artículo al 300 mes?

____

s) ¿En qué mes el artículo cuesta 4000?, ubícalo en la gráfica.____________________

FASE DE CIERRE **TIEMPO:** 15 minutos

INSTRUCCIONES:

El facilitador:

Da una breve retroalimentación de la actividad mencionando la importancia de las expresiones algebraicas C=ax y C=ax+b. También menciona que en la próxima sesión se les proporcionará una evaluación para corroborar si se adquirió el aprendizaje del tema de ecuación y función lineal.

EVALUACIÓN FINAL

A continuación se presenta la evaluación final que se aplicó el último día de manera individual con una duración de dos horas:

Alumno:

___

Instrucciones: Lee con atención los siguientes problemas y desarrolla cada uno de ellos.

1. En una caminata Mario avanza con velocidad constante, sin variación en la extensión de sus pasos ni en el tiempo empleado en cada paso.

El registro de la cantidad de minutos que le toma caminar está incompleto. Cálcula los valores que faltan en la tabla.

Pasos	Minutos
35	
70	
110	
120	
150	

a) En cuanto tiempo Mario camina 1700 pasos:______

b) En cuanto tiempo Mario camina 2800 pasos:______

c) Encuentra la ecuación que presente el desempeño de Mario: ______

d) De acuerdo al inciso c) escribe la función de la ecuación: ______________

2. Jorge el encargado del fotocopiado de la papelería "Alicia en el País de las Maravillas", desea elaborar una tabla para agilizar el cobro del número de copias de un tríptico matemático que se vende a los alumnos. El dependiente sabe que el costo de una fotocopia depende del número de hojas, es decir: por 10 copias se cobran $32.00, por 20, $ 62.00, etc.

En la tabla de la derecha indica el costo en pesos de las fotocopias y **x** el número de fotocopias.

Número de Copias **X**	**Desarrollo** **y =3x + 2**	**Resultado** **y**
10		
20		
30		
40		
50		
60		
100		
200		
400		
500		
1000		
1600		

Utiliza los datos y contesta las preguntas:

a) ¿Qué cuesta menos, fotocopiar tres tantos de 10 o 30 trípticos? ¿Por qué**?**

____

b) ¿Por qué a cualquier costo de número de fotocopias se le suma 2?

____

c) ¿La suma de $ 2.00 varía en cualquier costo de número de fotocopias? Explica: ____
d) Encuentra la ecuación que presente el costo y el número de copias: _______________
e) ¿Cuál es la función lineal?____
f) Representa gráficamente la función y =3x + 2**.**

3. Alberth Sánchez es el propietario de una juguetería. Su salario mensual consiste en 200 más el 10% de las ventas de la tienda durante el mes.
DESARROLLO i. Escriba la ecuación que represente el salario mensual en términos de la venta de la tienda:____________________________________ ii. Escriba una función que exprese su salario mensual (**m**) en términos de las ventas de la tienda (**s**):__________________ iii. Dibuje una gráfica de su salario mensual para ventas superiores a $ 20,000. iv. Explica la gráfica a partir de los parámetros de m y b. ____ v. Si las ventas del almacén durante el mes de abril son $ 15,000, ¿cuál será el salario de Alberth para abril?____

B) Resultados de la evaluación final

ALUMNO	REACTIVO 1					REACTIVO 2							REACTIVO 3
	TABLA	a	B	c	d	TABLA	a	b	c	d	e	f	
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	
2	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	
3	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	
4	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
5	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	
6	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	
7	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	
8	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	
9	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	
10	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	
11	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	
12	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	
13	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	
14	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	**Se elimino**
15	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	
16	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	
17	½	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	
18	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	
19	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	
20	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	
21	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	
22	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	
23	½	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	
24	½	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	
TOTAL BUENAS	21	24	24	0	0	24	9	23	17	11	13	18	
TOTAL DE MALAS	3	0	0	24	24	0	15	1	7	13	11	6	
PORCENTAJE BUENAS	88 %	100 %	100 %	0	0	100%	38%	96 %	71 %	46 %	54%	75%	
PORCENTAJE DE MALAS	12 %	0	0	100%	100%	0	62 %	4 %	29 %	54 %	46%	25%	